Hochschule RheinMain

Automatentheorie und Formale Sprachen

für die Studiengänge

- Angewandte Informatik
- Informatik - Technische Systeme

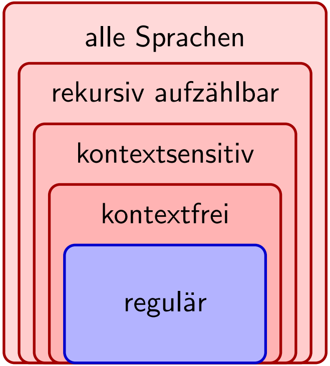
05 Regularität widerlegen

Prof. Dr. David Sabel

Sommersemester 2025

Stand der Folien: 21. Mai 2025

Motivation zum Pumping-Lemma

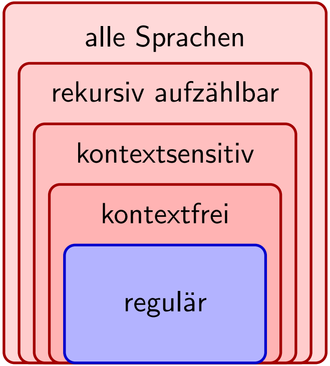


Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

- Endliche Automaten
- Reguläre Ausdrücke
- Reguläre Grammatiken

Motivation zum Pumping-Lemma

Hochschule RheinMain



Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

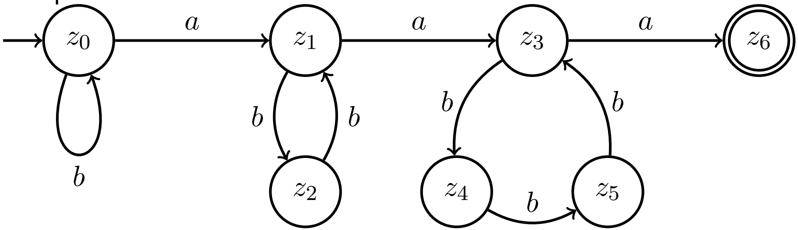
- Endliche Automaten
- Reguläre Ausdrücke
- Reguläre Grammatiken

Wie zeigt man, dass eine formale Sprache **nicht regulär** ist?

$\Rightarrow$ Das Pumping-Lemma ist ein Werkzeug dafür!

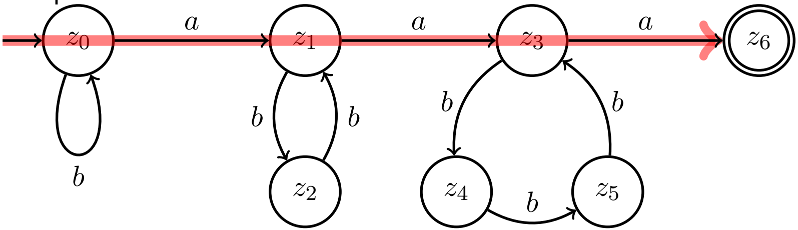
Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:



Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

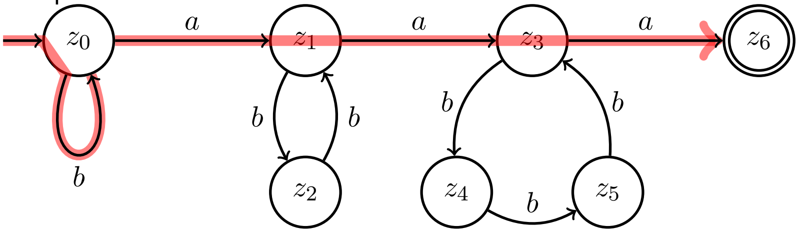
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

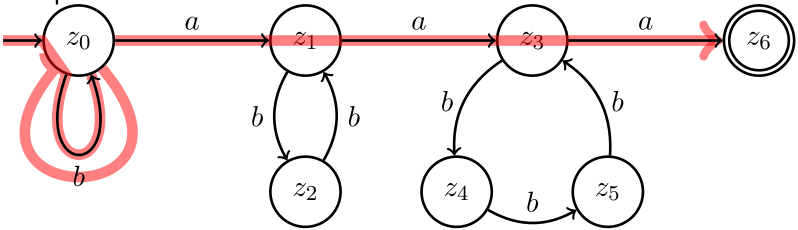
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

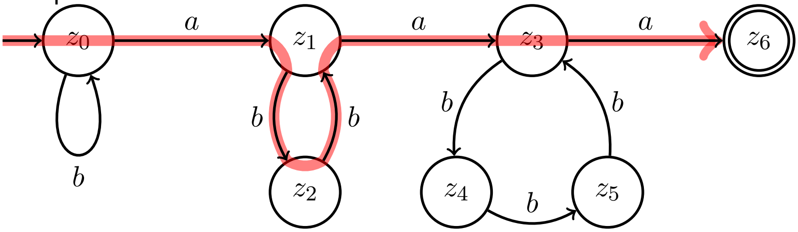
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

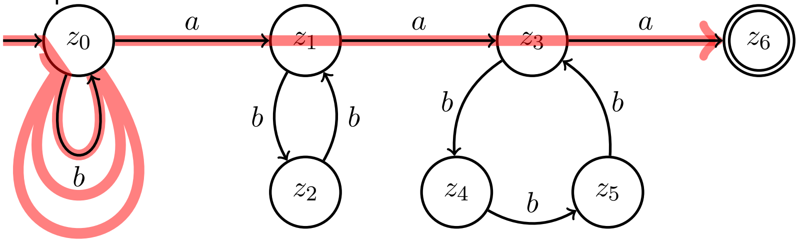


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Hochschule RheinMain

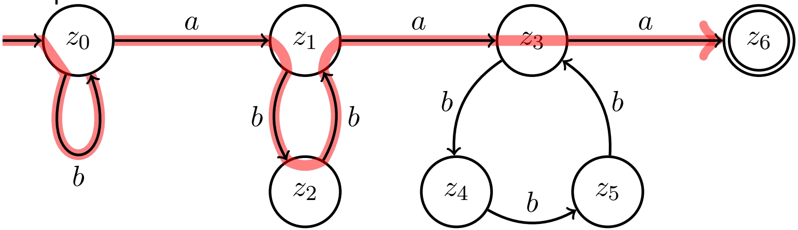
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

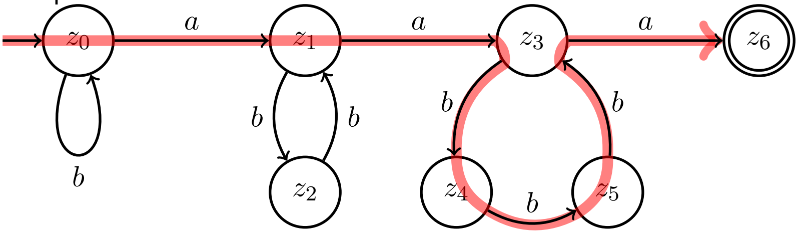


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Hochschule RheinMain

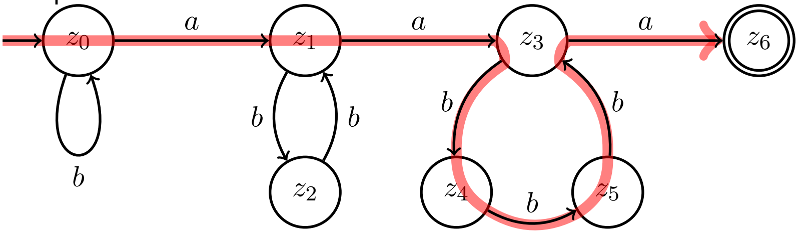
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

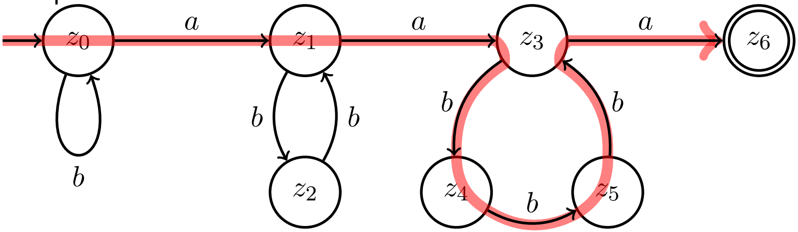


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Hochschule RheinMain

Beispiel: DFA M:



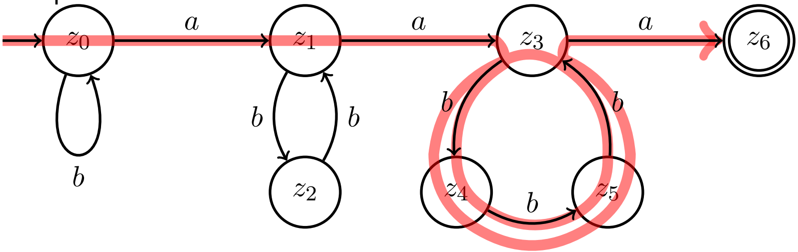
- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Hochschule RheinMain

Beispiel: DFA M:



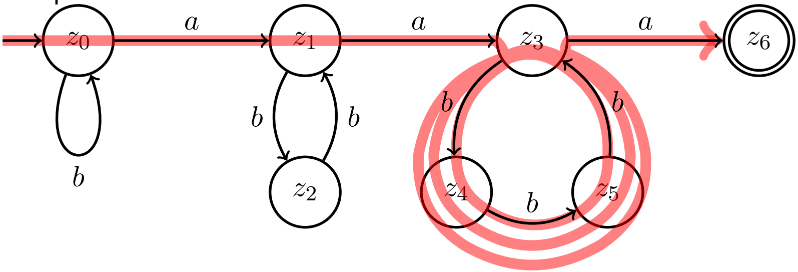
- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Hochschule RheinMain

Beispiel: DFA M:

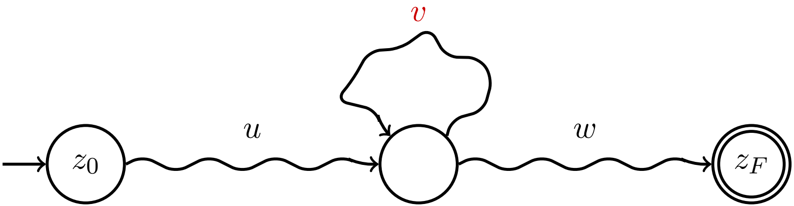


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**

Idee des Pumping-Lemmas: Allgemeiner

Gilt das allgemein?



- Wenn ein endlicher Automat n **Zustände** hat,
  dann müssen akzeptierte Wörter der **Länge** $\geq n$ eine Schleife durchlaufen
- Diese Wörter kann man aufpumpen: uvw, $uvvw$,$uvvvw$, ...
  Allgemein: uv^iw für $i = 0, 1, 2, \ldots$ liegen in der erkannten Sprache

Das Pumping-Lemma

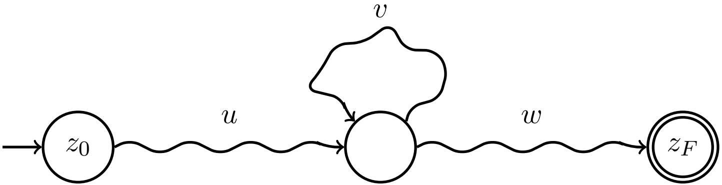
Hochschule RheinMain

Lemma 3.8.1 (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache L hat die folgende Pumping-Eigenschaft:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

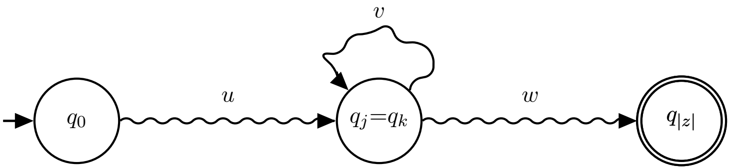
Die Zahl n nennt man auch die Pumping-Konstante der Sprache L



Beweis des Pumping-Lemmas (1)

Hochschule RheinMain

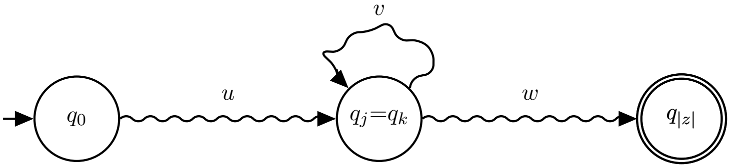
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert mit $|Z| = n$.
- Jeder Lauf für ein $z \in L$ besucht $|z| + 1$ Zustände. Sei $|z| \geq n$.
  Sei $q_0, q_1, \ldots q_{|z|}$ die besuchte Folge mit $q_0 = z_0$ und $q_{|z|} \in E$.
- Da $|Z| = n$, wird spätestens nach Lesen von n Zeichen ein Zustand erneut besucht
- Sei q_k (mit $k \leq n$) der erste Zustand, der bereits besucht wurde:
  D.h. es gibt $j < k$, sodass $q_k = q_j$ und k ist minimal, $z = uvw$ mit



Beweis des Pumping-Lemmas (2)

...

D.h. es gibt $j < k$, sodass $q_k = q_j$ und k ist minimal, $z = uvw$ mit



Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- Aus $j < k$ folgt $|v| \geq 1$.
- Aus $k \leq n$ folgt $|uv| \leq n$.
- Für $i = 0$: Aus $q_j = q_k$ folgt $\widehat{\delta}(q_0, u) = q_j = \widehat{\delta}(q_0, uv) = q_k$ und somit $\widehat{\delta}(q_0, uw) = \widehat{\delta}(q_0, uvw) = q_{|z|} \in E$, d.h. $uv^0w \in L(M)$.
  Sei $i > 0$. Aus $\widehat{\delta}(q_j, v) = q_k = q_j$ folgt $\widehat{\delta}(q_j, v^i) = q_j$ und daher $\widehat{\delta}(q_0, uv^iw) = \widehat{\delta}(q_k, v^iw) = \widehat{\delta}(q_j, w) = q_{|z|} \in E$. Daher gilt $uv^iw \in L(M)$. $\square$

Endliche Sprachen

Hochschule RheinMain

Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}\colon \forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))$$

Warum erfüllen **endliche Sprachen** das Pumping-Lemma?

Endliche Sprachen

Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}\colon \forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))$$

Warum erfüllen **endliche Sprachen** das Pumping-Lemma?

Wähle n größer als die Länge des längsten Worts!

Anwendung des Pumping-Lemmas

Hochschule RheinMain

- Pumping-Lemma:
  Sprache regulär $\Longrightarrow$ Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft
- Zeige, dass eine Sprache nicht regulär ist, durch Kontraposition:

> Sprache erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft
> $\Longrightarrow$ Sprache ist **nicht** regulär

Umformung der negierten Pumping-Eigenschaft

Hochschule RheinMain

$$\begin{array}{ll}
& \neg(\exists n \in \mathbb{N}{:}\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}\neg(\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(\neg(|z| \geq n) \vee (\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge \neg(\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \vee \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \exists i \geq 0{:}uv^iw \not\in L))))
\end{array}$$

Umformung der negierten Pumping-Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
&\neg(\exists n \in \mathbb{N}{:}\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}\neg(\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(\neg(|z| \geq n) \lor (\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \land \neg(\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \land (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \land (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1) \lor \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L)))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \land (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1) \Rightarrow \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L)))))\\
\longleftrightarrow\ &\forall n \in \mathbb{N}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \land (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1) \Rightarrow \exists i \geq 0{:}uv^iw \notin L))))
\end{aligned}
$$

Formale Sprache L erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft:

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$,
sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit

- $|uv| \leq n$ und
- $|v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert mit $uv^iw \notin L$.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

Anwendung des Pumping-Lemmas

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

Anwendung des Pumping-Lemmas

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^n b^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).

Anwendung des Pumping-Lemmas

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^n b^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).
- Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z,
  sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^n b^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).
- Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z,
  sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Dann ist $u = a^r, v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s > 0$ und $w = a^t b^n$ mit $r + s + t = n$.
  Daher können wir z.B. $i = 2$ wählen und erhalten
  $uv^i w = uv^2 w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$,da $s > 0$. □

Beweise Nicht-Regularität als Spiel

Sei L die formale Sprache.

1. Der **Gegner** wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}$.
2. **Wir** wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Der **Gegner** wählt Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \geq 0$ angeben können, sodass $uv^iw \notin L$.

Wenn wir das Spiel **für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners** gewinnen, dann haben wir die Nichtregularität von L nachgewiesen.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit p ist die nächste Primzahl, die größer gleich n ist.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit p ist die nächste Primzahl, die größer gleich n ist.
3. Der Gegner wählt Zerlegung $u = a^r$, $v = a^s$, $w = a^t$ mit $uvw = a^p$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ (und damit $s \geq 1$).

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit p ist die nächste Primzahl, die größer gleich n ist.
3. Der Gegner wählt Zerlegung $u = a^r$, $v = a^s$, $w = a^t$ mit $uvw = a^p$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ (und damit $s \geq 1$).
4. Wir wählen $i = p + 1$. Dann ist $uv^iw \notin L$, denn $uv^iw = a^r(a^s)^{p+1}a^t = a^{r+s\cdot(p+1)+t} = a^{r+s\cdot p+s+t} = a^{s\cdot p+p} = a^{p\cdot(s+1)}$ und für $s \geq 1$ folgt, dass $p \cdot (s+1)$ keine Primzahl sein kann. $\square$

Quiz 1

Hochschule RheinMain

Wo ist der Fehler in folgendem Beweis?

Aussage: Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis. Sei $n = 100$ (1).

Wir wählen $z = a^{100} b^{100}$ (2).

Dann gilt $z \in L$ (3) und $|z| \geq n$ (4).

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z (5) mit $|uv| \leq n$ (6) und $|v| \geq 1$ (7).

Dann ist für $i = 0$: $uv^i w = a^{100-|v|} b^{100}$ (8) und daher $uv^0 w \notin L$ (9).

Daher verletzt L die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen (10) und L ist daher nicht regulär (11).

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 2

Wo ist der Fehler in folgendem Beweis?

Aussage: Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis. Sei $n \geq 0$ (1).

Wir wählen $z = a^n b^n$ (2).

Dann gilt $z \in L$ (3) und $|z| \geq n$ (4).

Wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{n-1}b^n$(5). Dann gilt $|uv| \leq n$ (6) und $|v| \geq 1$ (7).

Dann ist für $i = 0$: $uv^iw = a^{n-1}b^n$ (8) und daher $uv^0w \notin L$ (9).

Daher verletzt L die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen (10) und L ist daher nicht regulär (11).

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 3

Hochschule RheinMain

Wo ist der Fehler in folgendem Beweis?

Aussage: Die Sprache $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis. Sei $n \geq 0$ (1).

Wir wählen $z = a^n a^n$ (2).

Dann gilt $z \in L$ (3) und $|z| \geq n$ (4).

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z (5) mit $|uv| \leq n$ (6) und $|v| \geq 1$ (7).

Dann ist für $i = 0$: $uv^i w = a^{n-|v|}a^n$ (8) und daher $uv^0w \notin L$ (9).

Daher verletzt L die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen (10) und L ist daher nicht regulär (11).

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.
3. Sei $z = uvw$ vom Gegner zerlegt, sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.
3. Sei $z = uvw$ vom Gegner zerlegt, sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. Wir wählen $i = 2$, d.h. wir betrachten $uv^2w = a^k$.
   - $1 + n^2 \leq k$ (denn $|v| \geq 1$)
   - $k \leq n^2 + n$ (denn $|uv| \leq n$ und daher $|v| \leq n$).

   Dann kann k jedoch keine Quadratzahl sein, denn $n^2 + n = (n+1) \cdot n < (n+1)^2$.
   Daher gilt $uv^2w \notin L$.
   Das Pumping-Lemma zeigt somit, dass L nicht regulär ist. $\square$

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ das Wort $z = a^{2^n}$.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ das Wort $z = a^{2^n}$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| = k \geq 1$.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ das Wort $z = a^{2^n}$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| = k \geq 1$.
- Dann ist $1 \leq k \leq n$ und $uv^2w = a^{2^n+k}$ und $2^n + k \neq 2^l$ da $2^n + k < 2^{n+1} = 2^n + 2^n$ denn $k \leq n < 2^n$.
  Daher ist $uv^2w \notin L$.

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ ist Palindrom$\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge n.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge n.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge n.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Dann ist $uv^0w = a^k b a^n$ mit $k = n - |v| < n$ kein Palindrom.

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Hochschule **RheinMain**

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^l c^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b, c\}^*$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Hochschule RheinMain

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^l c^l \mid k,l \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b,c\}^*$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei $n \geq 1$ beliebig.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Hochschule RheinMain

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^l c^l \mid k,l \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b,c\}^*$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei $n \geq 1$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Hochschule RheinMain

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^l c^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b, c\}^*$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei $n \geq 1$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$
- Wenn $z \in \{b, c\}^*$, zerlege $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$,v das erste Symbol von z und w der $n-1$-Zeichen lange Suffix von z. Offensichtlich gilt $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w \in \{b, c\}^* \subseteq L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

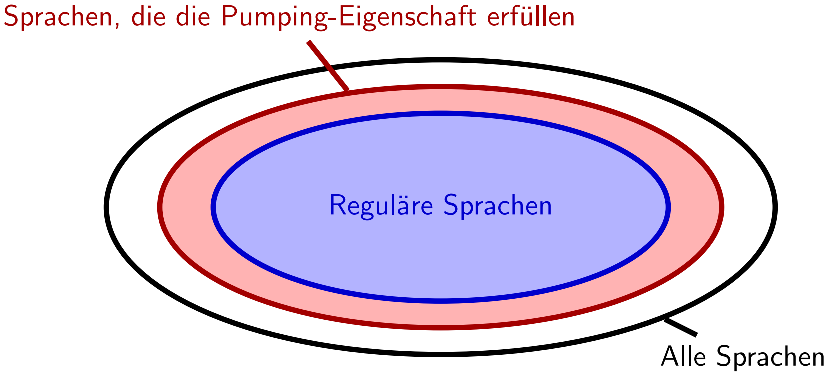
Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^l c^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b, c\}^*$ ist eine solche Sprache.

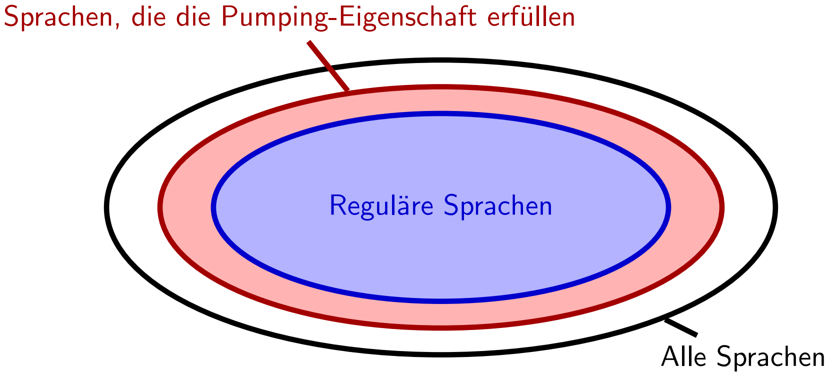
Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei $n \geq 1$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$
- Wenn $z \in \{b, c\}^*$, zerlege $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$,v das erste Symbol von z und w der $n-1$-Zeichen lange Suffix von z. Offensichtlich gilt $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$ und $uv^iw \in \{b, c\}^* \subseteq L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
- Wenn z von der Form $a^k b^l c^l$ ist und $z \notin \{b, c\}^*$, dann muss $k > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{k-1} b^l c^l$. Da $|v| = 1, |uv| \leq n$ und $uv^iw = a^{k+i-1} b^l c^l \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, erfüllt L die Eigenschaften des Pumping-Lemmas.

Mengendiagramm



Mengendiagramm



Wichtige Konsequenz

Das Pumping-Lemma kann <u>nicht</u> verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

Quiz 4

Hochschule RheinMain

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

1. Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit uv^iw liegt nicht in L.

2. Sei L eine formale Sprache. Dann ist L regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.

3. Sei L eine formale Sprache. Dann ist L keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit uv^iw liegt nicht in L.

4. Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.

5. Sei L eine formale Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$. Dann ist L regulär.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Zusammenfassung Pumping-Lemma

- Das Pumping-Lemma formuliert **eine notwendige Bedingung** für **reguläre** Sprachen:

  Sehr informell:

  Wörter einer regulären Sprache können aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.

- Anwendung:

  $$L \text{ erfüllt die } \textbf{Pumping-Eigenschaft nicht} \implies L \textbf{ nicht regulär}$$

- Das Pumping-Lemma gibt **keine hinreichende Bedingung** für reguläre Sprachen, d.h. Regularität kann **nicht** mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.
- Nicht-Regularität widerlegen funktioniert nicht in jedem Fall mit dem Pumping-Lemma!

Abschlusseigenschaften

Hochschule RheinMain

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Abschlusseigenschaften

Hochschule RheinMain

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Beweis:

Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen:

- Benutze reguläre Ausdrücke α_1, α_2 mit $L(\alpha_i) = L_i$.
- $(\alpha_1|\alpha_2)$ erzeugt $L(\alpha_1|\alpha_2) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) = L_1 \cup L_2$,
- $\alpha_1\alpha_2$ erzeugt $L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) = L_1L_2$ und
- $(\alpha_1)^*$ erzeugt $L(\alpha_1)^* = L_1^*$. $\square$

Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung.

Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung.

Beweis:

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA der L akzeptiert.
- Dann akzeptiert $\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$ die Sprache $\overline{L}$ (d. h. das Komplement von L):
  Offensichtlich gilt $(\widehat{\delta}(z_0, w) \in E) \iff \neg(\widehat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E)$
- Daher ist $\overline{L}$ regulär.

Abschlusseigenschaften (3)

Hochschule RheinMain

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt.

Abschlusseigenschaften (3)

Hochschule RheinMain

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt.

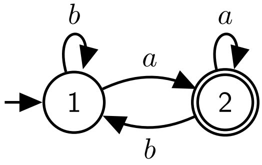
Beweis:

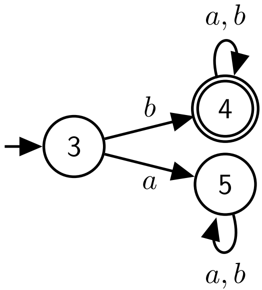
- Folgt aus $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ und da reguläre Sprachen abgeschlossen bez. Vereinigung und Komplementbildung.

Alternativ:

- Seien $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$ DFAs, die $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$ akzeptieren.
- Produktautomat von M_1 und M_2 ist der DFA $M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$ mit $\delta((z, z'), a) = (\delta_1(z, a), \delta_2(z', a))$ für alle $a \in \Sigma$ und $(z, z') \in Z_1 \times Z_2$.
- M akzeptiert $L_1 \cap L_2$, denn es gilt: $\widehat{\delta}((z_{0,1}, z_{0,2}), w) \in (E_1, E_2) \iff \left(\widehat{\delta_1}(z_{0,1}, w) \in E_1 \wedge \widehat{\delta_2}(z_{0,2}, w) \in E_2\right)$.

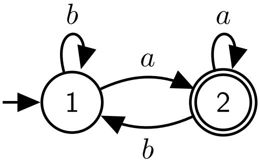
Beispiel: Produktautomat



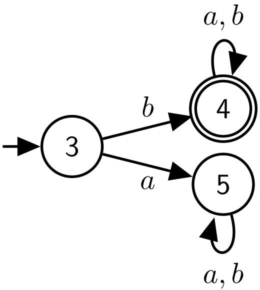


Beispiel: Produktautomat

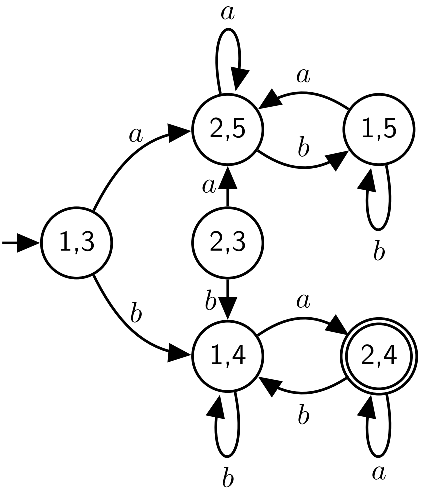
M1:



M2:

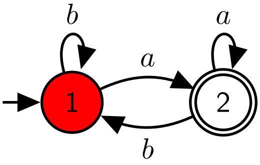


Produktautomat $M_1 \times M_2$

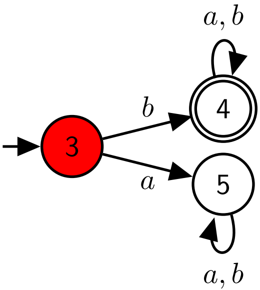


Beispiel: Produktautomat

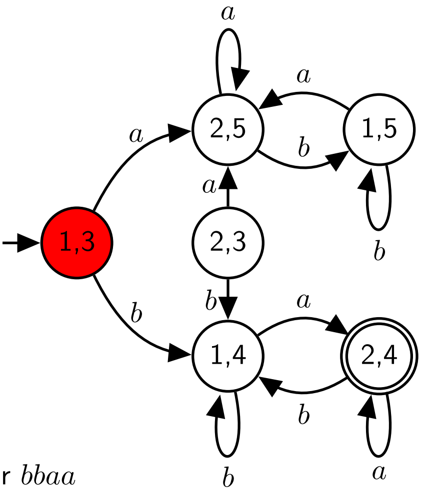
M1:



M2:

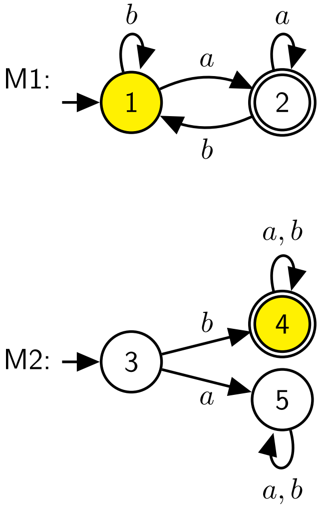


Produktautomat $M_1 \times M_2$

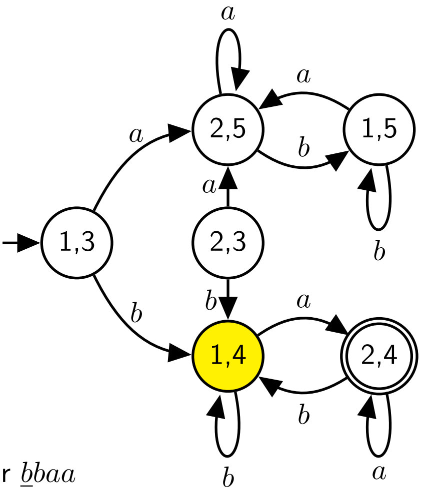


Lauf für $bbaa$

Beispiel: Produktautomat

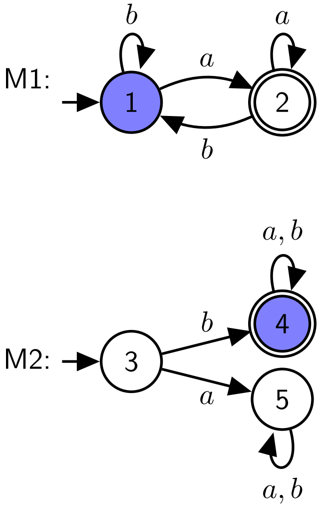


Produktautomat $M_1 \times M_2$

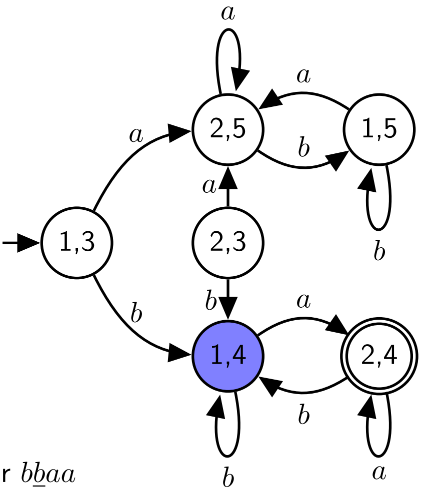


Lauf für $\underline{b}baa$

Beispiel: Produktautomat



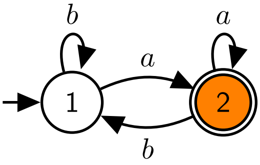
Produktautomat $M_1 \times M_2$



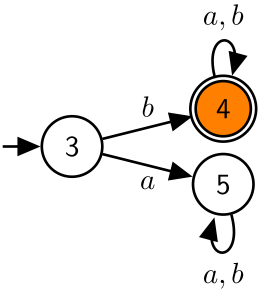
Lauf für $b\underline{b}aa$

Beispiel: Produktautomat

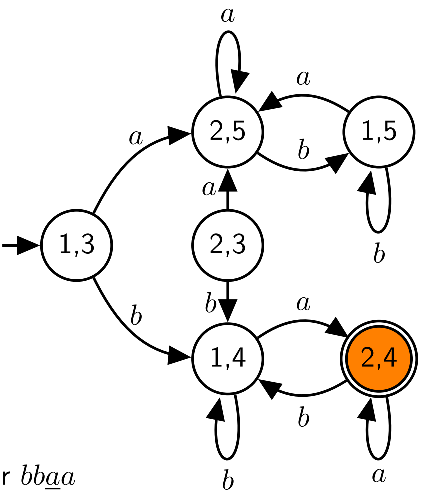
M1:



M2:



Produktautomat $M_1 \times M_2$

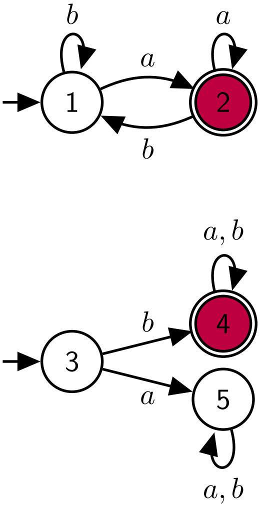


Lauf für $bb\underline{a}a$

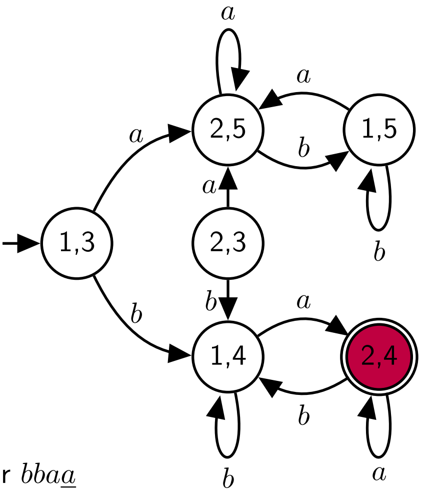
Beispiel: Produktautomat

M1:

M2:



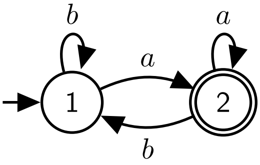
Produktautomat $M_1 \times M_2$



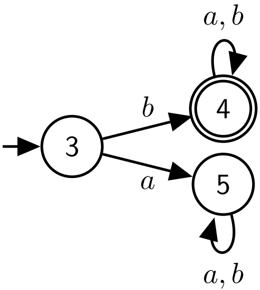
Lauf für $bba\underline{a}$

Beispiel: Produktautomat

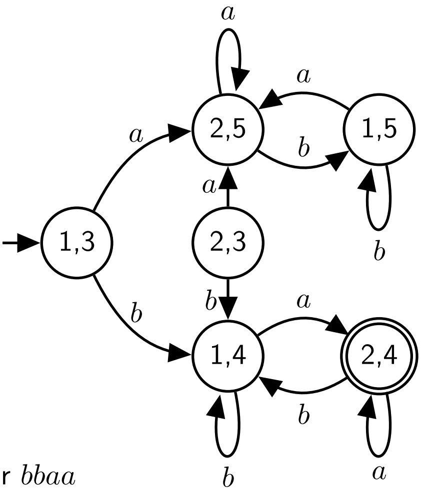
M1:



M2:



Produktautomat $M_1 \times M_2$



Lauf für $bbaa$

Abschlusseigenschaften zusammengefasst

Theorem (Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen)

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereingung, Schnitt, Komplementbildung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Quiz 5

Hochschule RheinMain

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter Schnitt:

Wenn L_1 regulär und L_2 regulär dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.

Welche Folgerungen sind korrekt?

1. Wenn $L_3 := L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder L_1 noch L_2 regulär.
2. Wenn $L_3 := L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.
3. Wenn $L_3 := L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und L_1 regulär ist, dann ist L_2 nicht regulär.
4. Wenn L_1 und L_2 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_3 := L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (1)

Hochschule RheinMain

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme L ist regulär.
- Dann ist $\overline{L}$ auch regulär.
- $\overline{L} = \{a\}^* \setminus L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist nicht regulär (bereits gezeigt)
- Widerspruch! Daher ist L nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (2)

Hochschule RheinMain

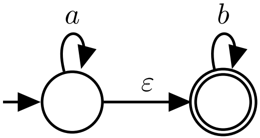
Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme: L ist regulär.
- Sprache $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ ist regulär, da der folgende NFA mit ε-Übergängen L' erkennt.



- Da L und L' regulär sind, ist auch $L \cap L'$ regulär.
- $L \cap L' = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ ist aber nicht regulär (wie bereits gezeigt)
- Widerspruch! D.h. L ist nicht regulär.

Vorsicht: Die folgenden Beweise sind alle falsch!

Hochschule RheinMain

- **FALSCH:** $L_x = \{x^n \mid n > 0\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist regulär.
- **FALSCH:** $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.
- **FALSCH:** $L_1 = \{\varepsilon, c\}$ ist regulär, $L_2 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist nicht regulär, also ist $L = \{c^i a^n b^n \mid n > 0, i \in \{0,1\}\}$ nicht regulär.

Vorsicht: Die folgenden Beweise sind alle falsch!

Hochschule RheinMain

- **FALSCH:** $L_x = \{x^n \mid n > 0\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist regulär.
- **FALSCH:** $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.
- **FALSCH:** $L_1 = \{\varepsilon, c\}$ ist regulär, $L_2 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist nicht regulär, also ist $L = \{c^i a^n b^n \mid n > 0, i \in \{0,1\}\}$ nicht regulär.

RICHTIG: $L = \{c^i a^n b^n \mid n > 0, i \in \{0,1\}\}$ ist nicht regulär:

Annahme: L regulär. Da $L(a^* b^*)$ regulär, ist auch $L \cap L(a^* b^*)$ regulär.
Aber $L \cap L(a^* b^*) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ ist bekanntermaßen nicht regulär.
Widerspruch! L kann nicht regulär sein.

Entscheidbarkeitsresultate: Wortproblem

Hochschule RheinMain

- Bereits gezeigt: Das Wortproblem für Typ 1,2,3-Sprachen ist entscheidbar.
- Für DFAs ist das Wortproblem in Linearzeit in der Länge des Wortes lösbar, denn die Berechnung von $\widehat{\delta}(z_0, w)$ braucht für einen DFA nur $|w|$ Schritte.

Entscheidbarkeitsresultate: Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Entscheidbarkeitsresultate: Leerheitsproblem

Hochschule RheinMain

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L reguläre Sprache und sei M ein DFA mit $L(M) = L$.
- Dann gilt $L = \emptyset$ genau dann, wenn es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in M gibt.
- Dies kann man leicht mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von M überprüfen.

Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Hochschule RheinMain

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L regulär und M ein DFA mit $L(M) = L$
- Es gilt $|L| < \infty$ g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.
- Prüfe dies mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von M.

Schnittproblem für reguläre Sprachen

Hochschule RheinMain

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Schnittproblem für reguläre Sprachen

Hochschule RheinMain

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
- Seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Berechne den Produktautomaten M mit $L(M) = L_1 \cap L_2$
- Prüfe das Leerheitsproblem für $L(M)$.

Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Hochschule RheinMain

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
- Seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Berechne die Minimalautomaten von M_1 und M_2
- Prüfe die Minimalautomaten auf Isomorphie.

Zusammenfassung: Reguläre Sprachen

- Formalismen: Reguläre Grammatiken, DFAs, NFAs (mit oder ohne ε-Übergänge), reguläre Ausdrücke,
- Äquivalenzklassenautomat und Minimierung von DFAs
- NFA in DFA: Determinisierung mit Potenzmengenkonstruktion
- Pumping-Lemma (Pumping-Eigenschaft notwendig, nicht hinreichend!)
- Nicht-Regularität nachweisen: Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen
- Entscheidbarkeitsresultate für reguläre Sprachen