

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

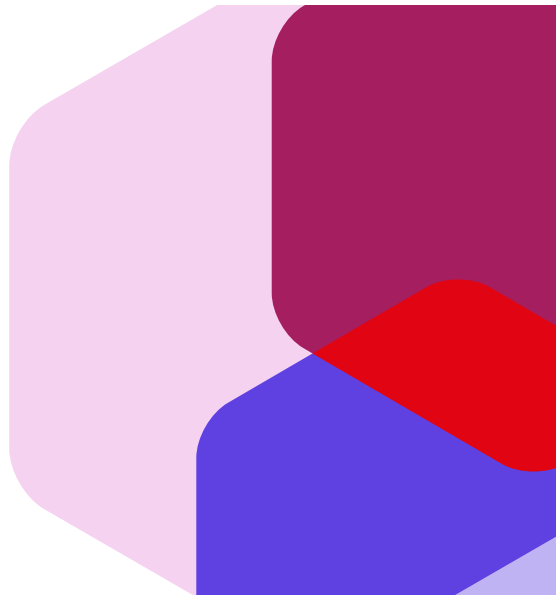
Angewandte Informatik & Technische Informatik

02 Logik

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2025/26

Stand der Folien: 2. Dezember 2025

Bildnachweis: Alle Bilder sind selbst gezeichnet oder generiert mit KI von OpenAI unter <https://xt.hi-rn.de>



Inhalt

- 1 Aussagen und Aussagenlogik
- 2 Gesetze der Aussagenlogik
- 3 Vollständige Mengen von Junktoren
- 4 Anwendungen der Aussagenlogik
- 5 Quantoren und prädikatenlogische Formeln

Aussagen und Aussagenlogik



Einführendes zur Logik

- Wichtige Grundlage der Informatik:
 - Kontrollfluss in Programmen wird durch Logik gesteuert
 - Digitale Schaltungen basieren auf Schaltungslogik
 - Logische Programmiersprachen basieren auf Logiken
 - Inferenzsysteme verwenden logische Schlüsse
 - Spezifikationen in der Programmverifikation werden in Logiken formuliert
 - ...
- Eine Logik ist formal aufgebaut aus
 - Syntax: Wie sehen formal aus?
 - Semantik: Welche Bedeutung haben (syntaktisch richtige) Formeln?

Definition (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein sprachlicher Satz, der entweder **falsch** oder **wahr** ist (aber nie beides gleichzeitig).

Definition (Wahrheitswerte)

Eine **wahre** Aussage hat den Wahrheitswert „*w*“ (oder „1“ oder „true“)

Eine **falsche** Aussage hat den Wahrheitswert „*f*“ (oder „0“ oder „false“).

- Wiesbaden ist die Landeshauptstadt von Hessen. (*w*)
- Es gibt beliebig große Primzahlen. (*w*)
- $10+20 = 42$ (*f*)
- Alle Informatikstudierenden lieben die Mathematik (unklar, vermutlich *f*)
- Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen (unbekannt). Dies ist die Goldbach-Vermutung, die bis heute unbewiesen ist.
- Jedes Java-Programm hält irgendwann an. (*f*)

- Guten Morgen!
- $5+3$
- Wann ist die Vorlesung endlich vorbei?
- **Keine** Aussage ist folgendes Paradoxon:
„Ich lüge gerade.“

Sowohl die Annahme, es sei wahr, als auch die Annahme, es sei falsch, führen zu einem Widerspruch!

Quiz 1

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?

- A) Die Erde ist eine Scheibe.
- B) Lasst uns feiern!
- C) 2 ist eine Primzahl.
- D) Wann machen wir Pause?
- E) Dieser Satz ist falsch.
- F) Die Kreiszahl π enthält jede beliebige Ziffernfolge.

Wahrheitsgehalt der Aussagen?

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Syntax der Aussagenlogik



Aussagen werden durch Variablen $A, B, \dots$ repräsentiert (= aussagenlogische Variablen)

Definition (Aussagenlogische Formeln)

Aussagenlogische Variablen und Wahrheitswerte sind aussagenlogische Formeln

Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, dann auch

$(\neg F)$	(Negation)	„nicht F “
$(F \wedge G)$	(Konjunktion) logisches Und	„ F und G “
$(F \vee G)$	(Disjunktion) logisches Oder	„ F oder G “
$(F \oplus G)$	(Kontravalenz), exklusives Oder	„ F entweder oder G “
$(F \rightarrow G)$	(Implikation)	„wenn F , dann G “
$(F \leftrightarrow G)$	(Äquivalenz) Biimplikation	„ F genau dann, wenn G “

Beispiel: $(A \vee (B \wedge \neg(C \rightarrow w)))$

Junktoren



Die aussagenlogischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, \dots$ nennt man auch **Junktoren**

Wir zählen auch w und f zu den Junktoren (0-stellige Junktoren).

Bedeutung der Junktoren: Sie sind Funktionen auf Wahrheitswerten.
D.h. für Eingaben berechnen sie Ausgaben.

Wir legen sie fest durch Wahrheitstabellen.

Eselsbrücke: $\vee$ „Oder ist oben offen“

Semantik der Negation



A	$\neg A$
w	f
f	w

D.h. $\neg A$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn A falsch ist.

Z.B. ist $\neg(\text{Die Erde ist eine Scheibe})$ eine wahre Aussage.

Semantik der Konjunktion



A	B	$(A \wedge B)$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \wedge B)$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn **beide** Aussagen A und B wahr sind.

Semantik der Disjunktion

A	B	(A ∨ B)
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

D.h. $(A \vee B)$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn **mindestens eine** der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Quiz 2

Welche der folgenden Aussagenlogischen Formeln sind **wahr**?

- A) $w \wedge f$
- B) $f \vee w$
- C) $\neg f$
- D) $\neg w$
- E) $\neg(w \vee f)$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 3

Was stimmt?

- A) $\wedge$ ist der Junktion für die Konjunktion
- B) $\neg$ ist der Junktor für die Disjunktion
- C) $\vee$ ist der Junktor für die Konjunktion

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Semantik der Kontravalenz

A	B	(A ⊕ B)
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f



D.h. $(A \oplus B)$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn **genau eine** der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Semantik der Implikation

hsrm*

Die Implikation hat die folgende Semantik:

A	B	$(A \rightarrow B)$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \rightarrow B)$ ist genau dann wahr,
wenn A falsch ist oder A und B beide wahr sind.

Semantik der Äquivalenz

hsrm*

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \leftrightarrow B)$ ist genau dann wahr,
wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

Quiz 4



Welche der folgenden Aussagenlogischen Formeln sind **wahr**?

- A) $w \oplus w$
- B) $f \rightarrow w$
- C) $f \leftrightarrow f$
- D) $w \rightarrow f$
- E) $w \leftrightarrow \neg f$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 5



Ordne die Bezeichnungen den Junktoren von oben nach unten zu

- 1. $\wedge$
- 2. $\vee$
- 3. $\rightarrow$
- 4. $\oplus$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Kontravalenz	Implikation	Äquivalenz
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	f	w	w
f	w		f	w	w	w	f
w	f	f	f	w	w	f	f
w	w		w	w	f	w	w

Der Wahrheitswert der Formeln hängt ab vom Wahrheitswert der Variablen.

Eine Belegung $\mathcal{B}$ weist (endlich vielen) aussagenlogischen Variablen einen Wahrheitswert zu.

Belegung $\mathcal{B}$ für F weist mindestens allen Variablen aus F einen Wahrheitswert zu.

$\mathcal{B}(F)$: „Wahrheitswert von F unter der Belegung $\mathcal{B}$ “

- ➊ Ersetze A durch $\mathcal{B}(A)$ in F .
- ➋ Werte danach die Junktoren von innen nach außen aus.

Formel $F = ((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow A))$.

Belegung $\mathcal{B}_1 = \{A \mapsto f, B \mapsto f, C \mapsto w\}$

Berechne $\mathcal{B}_1(F)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1(F) &= \mathcal{B}_1((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow A)) \\
 &= ((\mathcal{B}_1(A) \wedge \neg \mathcal{B}_1(B)) \rightarrow \neg(\mathcal{B}_1(C) \rightarrow \mathcal{B}_1(A))) \\
 &= ((f \wedge \neg f) \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\
 &= ((f \wedge w) \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\
 &= (f \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\
 &= (f \rightarrow \neg f) \\
 &= (f \rightarrow w) \\
 &= w
 \end{aligned}$$

Verwende eine Wahrheitstabelle:

- Spalten für alle Variablen
- Spalten für alle Teilformeln
- Zeilen für jede mögliche Belegung der Variablen
- Sukzessive Auswertung der Teilformeln, bis man bei der Gesamtformel ist.

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w
f	w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	w	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f
w	w	f	f	f	w	f	w
w	w	w	f	f	w	f	w

GESETZE DER AUSSAGENLOGIK

- Gesetze von de Morgan
- Gesetze der Booleschen Algebra
- Dualität
- Weitere Rechengesetze



Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $(\neg A) \vee (B \wedge C)$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität > bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $\neg A \vee B \wedge C \rightarrow D \neg A \vee B \wedge C \rightarrow D (\neg A) \vee B \wedge C \rightarrow D (\neg A) \vee B \wedge C \rightarrow D (\neg A) \vee (B \wedge C) \rightarrow D (-$

Assoziativität: $A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C$ oder $\dots = A \vee (B \vee C)$? später...

Sätze

Definition (Tautologie)

Eine aussagenlogische Formel, die für **jede Belegung wahr** ist, nennt man eine **Tautologie** (oder **allgemeingültige Formel**)

Tautologien sind die **Sätze der Logik**.

Beispiel: $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie, denn

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
f	f	f	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	w

Widerspruch

Definition (Widerspruch)

Eine aussagenlogische Formel, die für jede Belegung falsch ist, nennt man eine **Kontradiktion** (oder **Widerspruch**)

Beispiel:

$A \wedge \neg A$ ist eine Kontradiktion, denn

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
f	w	f
w	f	f

Erfüllbarkeit und Widerlegbarkeit

Definition (Erfüllbarkeit und Widerlegbarkeit)

Sei F eine aussagenlogische Formel

- Wenn F für **mindestens eine Belegung wahr** ist, dann heißt F **erfüllbar**.
- Wenn F für **mindestens eine Belegung falsch** ist, dann heißt F **widerlegbar**

Beispiele:

- $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie, damit auch erfüllbar, aber nicht widerlegbar.
- $A \wedge \neg A$ eine Kontradiktion, damit auch widerlegbar, aber nicht erfüllbar.
- $A \wedge B$ ist erfüllbar und widerlegbar, denn

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
w	w	w

Logische Äquivalenz

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Nachweis $F \equiv G$: Wahrheitstabelle mit allen Belegungen und mit Spalten für F und G .
Diese dann vergleichen

Beispiel: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ gilt, denn:

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
f	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
w	w	f	w	w

Nachweis von $\equiv$ mit syntaktischer Äquivalenz

Satz

Zwei Formeln F und G sind genau dann logisch äquivalent, wenn $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie ist.

Beweis (Skizze): Zwei Richtungen.

- „Wenn $F \equiv G$, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie.“
- „Wenn $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie ist, dann gilt $F \equiv G$.“

In beiden Fällen kann man über alle Belegungen argumentieren (siehe Skript).

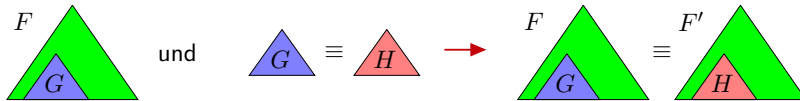
Austausch von logisch äquivalenten Formeln

Logische äquivalente (Teil-)Formeln darf man austauschen:

Satz

Sei F eine aussagenlogische Formel, die die Formel G als Teilformel enthält. Sei $G \equiv H$. Dann gilt $F \equiv F'$, wobei F' aus F entsteht, indem die Teilformel G durch H ersetzt wird.

Skizze dazu:



Beweis: Argumentiere über die Berechnung mit der Wahrheitstabelle.

Substitution von Variablen mit Formeln

Definition (Substitution)

Seien $F, G_1, \dots, G_n$ Formeln und $A_1, \dots, A_n$ aussagenlogische Variablen. Dann bezeichne $F[G_1/A_1, \dots, G_n/A_n]$ die Formel, die entsteht, indem jeweils für $1 \leq i \leq n$ alle Vorkommen von A_i in F durch die Formel G_i ersetzt werden.

Bemerkung: Die Substitution ist parallel durchzuführen, denn

$$F[G/A][H/B] \neq F[G/A, H/B] \text{ wenn } B \text{ in } G \text{ vorkommt}$$

Satz

Seien F, G, H aussagenlogische Formeln, A eine aussagenlogische Variable. Wenn $F \equiv G$ gilt, dann gilt auch $F[H/A] \equiv G[H/A]$

Gesetze von de Morgan

Satz von den Morgan

Seien F und G aussagenlogische Formeln. Dann gilt

Erstes de Morgansches Gesetz: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$

Zweites de Morgansches Gesetz: $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

Beweis. Es genügt, die Teilformeln F und G wie aussagenlogische Variablen zu behandeln (wegen letztem Satz).

Wahrheitstabelle:

F	G	$(F \wedge G)$	$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$	$\neg F \vee \neg G$
f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	f	f	f	f

Das zweite Gesetz lässt sich analog beweisen. $\square$

Rechengesetze für $\neg, \wedge, \vee$

Satz (Rechengesetze für $\wedge, \vee, \neg$)

Für alle aussagenlogischen Formeln F, G, H gelten die folgenden Gesetze:

- Kommutativgesetz: $F \wedge G \equiv G \wedge F$ und $F \vee G \equiv G \vee F$
- Assoziativgesetz: $(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$ und $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$
- Distributivgesetze: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ und $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
- Existenz neutraler Elemente: $F \wedge w \equiv F$ und $F \vee f \equiv F$
- Existenz des Komplements: $F \wedge \neg F \equiv f$ und $F \vee \neg F \equiv w$

Alle Gesetze können mit Wahrheitstabellen bewiesen werden.

Wir machen es nur für das 1. Distributivgesetz

Beweis des 1. Distributivgesetzes

F	G	H	$G \wedge H$	$F \vee (G \wedge H)$	$F \vee G$	$F \vee H$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$
f	f	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w

Klammerregeln

Satz

$\oplus$ ist kommutativ und assoziativ.

Beweis. Übungsaufgabe

Da $\vee, \wedge, \oplus$ assoziativ sind, lassen wir Klammern manchmal weg und schreiben $F \vee G \vee H, F \wedge G \wedge H$ bzw. $F \oplus G \oplus H$.

Quiz 6

Was stimmt?

- A) $\neg(A \vee \neg B) \equiv \neg A \wedge \neg \neg B$ gilt aufgrund der Gesetze von de Morgan
- B) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ gilt aufgrund des Assoziativgesetzes
- C) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ gilt aufgrund des Kommutativgesetzes
- D) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ gilt aufgrund des Distributivgesetzes

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 7

Ausmultiplizieren von $A \wedge (B \vee C)$ mit dem Distributivgesetz ergibt:

- A) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- B) $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$
- C) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- D) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Boolesche Algebra

Eine Menge mit ausgezeichneten Elementen w, f und Operationen $\wedge, \vee, \neg$ auf dieser Menge, für welche die

- Kommutativgesetze,
- Assoziativgesetze,
- Distributivgesetze,
- Existenz neutraler Elemente und
- Existenz des Komplements

gelten, nennt man **Boolesche Algebra** (benannt George Boole).

D.h. insbesondere $(\{f, w\}, \wedge, \vee, \neg)$ wie zuvor definiert, ist eine Boolesche Algebra. Es gibt auch weitere Boolesche Algebren.

Dualität

Die Rechengesetze bestehen immer aus zwei symmetrischen Teilen:

Man erhält den einen Teil aus dem Anderen, indem man $\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauscht.

Diese Eigenschaft der Booleschen Algebra nennt man **Dualität**

Ein Satz ist **dual** zu einem anderen Satz, wenn man ihn erhält, indem man $\wedge$ mit $\vee$ sowie f mit w vertauscht.

Weitere Rechengesetze

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetz: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
- Idempotenzgesetz: $F \vee F \equiv F$ und $F \wedge F \equiv F$
- Involutionsgesetz (doppelte Negation): $\neg(\neg F) \equiv F$
- Extremalgesetz: $F \vee w \equiv w$ und $F \wedge f \equiv f$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

$$\begin{aligned} \text{1. Absorptionsgesetz: } & F \wedge (F \vee G) \\ \equiv & (F \vee f) \wedge (F \vee G) \quad (\text{Existenz neutraler Elemente}) \\ \equiv & (F \vee (f \wedge G)) \quad (\text{Distributivgesetz}) \\ \equiv & (F \vee (G \wedge f)) \quad (\text{Kommutativgesetz}) \\ \equiv & (F \vee f) \quad (\text{Extremalgesetz}) \\ \equiv & f \quad (\text{Existenz neutraler Elemente}) \end{aligned}$$

Aufgrund der Dualität können wir in allen Zwischenschritten $\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauschen, was direkt das zweite Absorptionsgesetz zeigt.

Weitere Rechengesetze (2)

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Idempotenzgesetz: $F \vee F \equiv F$ und $F \wedge F \equiv F$

Beweis des 1. Idempotenzgesetz:

$$\begin{aligned} & F \vee F \\ \equiv & F \vee (F \wedge w) \quad (\text{Existenz neutraler Elemente}) \\ \equiv & F \quad (\text{Absorptionsgesetz}) \end{aligned}$$

Da das 1. Absorptionsgesetz dual zum 2. Absorptionsgesetz ist, folgt das 2. Idempotenzgesetz mittels der Dualität.

Vereinfachen von Formeln mit den Rechengesetzen

Wir vereinfachen die Formel $\neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B)$

$$\begin{aligned}
 & \neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B) \\
 \equiv & (\neg A \wedge \neg \neg B) \vee (A \wedge B) && \text{(De Morgansches Gesetz)} \\
 \equiv & (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) && \text{(Involutionsgesetz)} \\
 \equiv & (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge A) && \text{(Kommutativgesetz, 2 Mal)} \\
 \equiv & B \wedge (\neg A \vee A) && \text{(Distributivgesetz)} \\
 \equiv & B \wedge (A \vee \neg A) && \text{(Kommutativgesetz)} \\
 \equiv & B \wedge w && \text{(Komplement)} \\
 \equiv & B && \text{(Neutrale Elemente)}
 \end{aligned}$$

Boolesche Funktionen

Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Umgekehrte Frage: Welche Booleschen Funktionen gibt es?

0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.

1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f , konstant w , Negation

2-stellig: ...

Satz

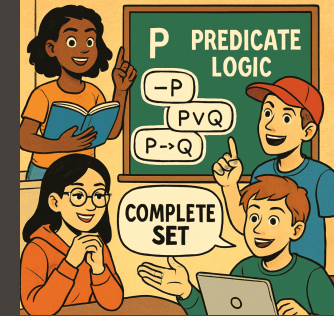
Für jede Boolesche Funktion h gibt es eine aussagenlogische Formel, die h berechnet.

Beweisidee:

- Gegeben: Wahrheitstabelle für h .
- Für jede „w“-Zeile: Bilde Konjunktion entsprechend der Belegung.
- Gesamtformel F : Disjunktion der Konjunktionen.
- $B(F)$ ist genau dann wahr, wenn $h(B(A_1), \dots, B(A_n))$ wahr ist.

VOLLSTÄNDIGKEIT VON JUNKTOREN

- Boolesche Funktionen
- Vollständige Menge von Junktoren



Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge C$$

$$A \wedge B \wedge C$$

$$F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Eine solche Disjunktion von Konjunktionen nennt man auch **Disjunktive Normalform**.

Definition (Vollständige Menge)

Eine Menge M von Junktoren heißt **vollständig**, wenn für jede aussagenlogische Formel eine logisch äquivalente Formel existiert, die nur die Junktoren aus M benutzt.

Beispiele:

- $\{w, f, \vee, \wedge\}$ nicht vollständig, denn z.B. für $\neg A$ keine logisch äquivalente Formel
- $\{\vee, \wedge, \neg\}$ vollständig, denn

$$\begin{aligned} w &\equiv A \vee \neg A & f &\equiv A \wedge \neg A & F \rightarrow G &\equiv \neg F \vee G \\ F \leftrightarrow G &\equiv F \rightarrow G \wedge G \rightarrow F & F \oplus G &\equiv (F \vee G) \wedge \neg(F \wedge G) \end{aligned}$$

- $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ jeweils vollständig, denn

$$F \wedge G \equiv \neg(\neg F \vee \neg G) \quad F \vee G \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G)$$

Schaltkreise sind aussagenlogische Formeln.

Beispiel: 2-aus-3-Schaltung: Die Wahrheitstabelle der gesuchten Funktion h :

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	f
f	f	w	f
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	w
w	w	f	w
w	w	w	w



Disjunktive NF $F := (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

ANWENDUNGEN DER AUSSAGENLOGIK

- Digitale Schaltungen
- SAT-Solving



$$F := (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

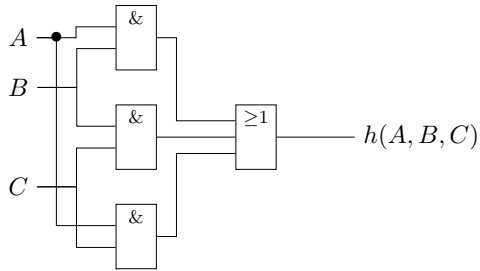
kann man vereinfachen:

$$\begin{aligned} &(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \vee (\neg C \wedge C)) && \text{(Ausklammern von } A \wedge B) \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \wedge w) && \text{(Existenz des Komplements)} \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B) && \text{(Idempotenzgesetz)} \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee B)) && \text{(Ausklammern von } A) \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge ((B \vee \neg B) \wedge (B \vee C))) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (w \wedge (B \vee C))) && \text{(Existenz des Komplements)} \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (B \vee C)) && \text{(Idempotenzgesetz)} \\ &\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\ &\equiv (C \wedge ((\neg A \wedge B) \vee A)) \vee (A \wedge B) && \text{(Ausklammern von } C) \\ &\equiv (C \wedge ((A \vee \neg A) \wedge (A \vee B))) \vee (A \wedge B) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\ &\equiv (C \wedge (w \wedge (A \vee B))) \vee (A \wedge B) && \text{(Existenz des Komplements)} \\ &\equiv (C \wedge (A \vee B)) \vee (A \wedge B) && \text{(Idempotenzgesetz)} \\ &\equiv (C \wedge A) \vee (C \wedge B) \vee (A \wedge B) && \text{(Ausmultiplizieren)} \end{aligned}$$

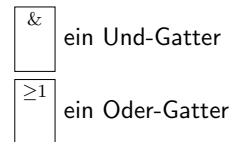
Es gibt dafür spezielle Verfahren (KV-Diagramme) und Tools z.B. wolframalpha.com.

$$F \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Schaltkreis dazu



Dabei ist:

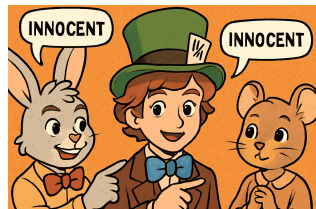


- Idee: Kodiere Problem als aussagenlogische Formel
- Ziel: Finde erfüllende Belegung eine Formel (nennt man auch **Modell**)
- Erfüllende Belegung = Lösung des Problems / Rätsels etc.
- Softwarewerkzeug zum Finden des Modells: SAT-Solver (SAT = satisfiability)
- Wir betrachten als Beispiel ein Rätsel von Raymond Smullyan.

Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- 1 Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- 2 Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- 3 Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- 4 Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H , S und M für Hutmacher / Schnappphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$
- Für 2. und 4.: $\neg H \rightarrow \neg M$

Gesamtformel:

$$(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M)$$

Modell berechnen mit SAT-Solver

Vereinfachen

$$\begin{aligned} & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \end{aligned}$$

Dies ist eine **Konjunktive Normalform** (eine Disjunktion von Konjunktionen)Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format Ausgabe (z.B. msoos.github.io/cryptominisat_web)
(1 = H , 2 = M , 3 = S)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

SAT -1 -2 3

Erfüllende Belegung ist:

$$\{H \mapsto f, M \mapsto f, S \mapsto w\}$$

D.h. ?

FORMELN MIT QUANTOREN

- Aussageformen
- All- und Existenzquantoren
- Prädikatenlogische Formeln



Quantoren: Einführung

- Wir machen die Betrachtung nicht ganz formal
- Lernziel: Umgang mit Quantoren beherrschen
- Genaue Semantik ist Inhalt vertiefender Veranstaltungen

Objektvariablen und Aussageformen

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „ x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „ x ist eine Primzahl“ ist **keine** Aussage!
- **Aussageform**: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

Aussageform „ x ist eine Primzahl“

- 2 für x einsetzen: Man erhält eine wahre Aussage
- 4 für x einsetzen: Man erhält eine falsche Aussage
- Grün für x einsetzen: Das ist nicht gewollt!
- Die Menge der Werte für x sollte einschränkbar sein.

Ein solche **Menge für Objektvariablen** nennt man **Universum**

Universumsbeispiele, Aussageform

- „ x ist eine Primzahl“ $\rightarrow$ sinnvolles Universum für x : $\mathbb{N}$
- „ x ist eine Farbe der additiven Farbmischung“
 $\rightarrow$ sinnvolles Universum für x : alle Farben
- „Man benötigt x Fußballspieler:innen pro Team, damit ein Spiel angepfiffen werden darf.“
 $\rightarrow$ sinnvolles Universum: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Definition (Aussageform)

Seien $x_1, \dots, x_n$ Variablen und $U_1, \dots, U_n$ Universen. Dann ist eine **Aussageform** ein Satz mit Variablen $x_1, \dots, x_n$, sodass nach Ersetzen aller Variablen x_i durch Objekte $u_i \in U_i$ ein Satz entsteht der wahr oder falsch ist.

Prädikatensymbole

- In der Aussagenlogik: Variablen $A, B, \dots$ für Aussagen
- Jetzt: Variablen $P, Q, \dots$ für Aussageformen
- Um die Anzahl und Namen der Objektvariablen von P festzulegen: $P(x_1, \dots, x_n)$
 P ist dann n -stellig.
- $P, Q, \dots$ nennt man auch Prädikatensymbole

Beispiel:

- $P_1(x) = „x \text{ ist Primzahl}“$
- Verwende dann $P_1(x)$ in den Formeln
- $P_1(2)$ meint dann die Aussage „2 ist Primzahl“.

Beispiel mit 3-stelligem Prädikatensymbol:

- $Q(x, y, z) := x + y = z$
- $Q(1, 2, 3)$ ist eine wahre Aussage, $Q(2, 2, 3)$ ist eine falsche Aussage

Allaussagen

Allaussagen sind Aussagen über alle Elemente eines Universums.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
Für alle x aus der Menge der Dreiecke gilt: Winkelsumme von x ist 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.
Für alle x aus $\{15, 27, 69\}$ gilt: x ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt

gebracht werden.

Allquantor

„Für alle x aus einem Universum U gilt $P(x)$ “

wird mit neuer Syntax (dem Allquantor $\forall$) ausgedrückt als

$$\forall x \in U : P(x)$$

Semantik des Allquantors

$\forall x \in U : P(x)$ ist genau dann wahr,
wenn $P(u)$ für jedes $u \in U$ eine wahre Aussage ist.

Beachte: $\forall x \in U : P(x)$ ist wieder eine Aussage (wenn es keine anderen Variablen als x gibt)!

Beispiele

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\} : \text{ungerade}(x)$ (w)
- $\forall x \in \mathbb{N} : \text{Wenn } x \text{ Primzahl, dann ist } x \text{ ungerade}$ (f)
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x)$ (f)

Satz

Sei $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ein **endliches** Universum. Dann gilt
 $\forall u \in U : P(u) \equiv P(u_1) \wedge \dots \wedge P(u_n)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x) \\ \equiv & \text{gerade}(2) \wedge \text{gerade}(3) \wedge \text{gerade}(4) \wedge \text{gerade}(5) \end{aligned}$$

Existenzaussagen fordern, dass **mindestens ein Element eines Universums** eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$, für das gilt: x ist gerade Primzahl
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.
Es gibt ein $x \in \{1, 3, 5, 7, 8\}$, für das gilt: x ist gerade

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U , für das gilt

gebracht werden.

Es gibt ein x aus einem Universum U , für das gilt: $P(x)$

wird mit neuer Syntax (dem **Existenzquantor** $\exists$) ausgedrückt als

$$\exists x \in U : P(x)$$

Semantik des Existenzquantors

$\exists x \in U : P(x)$ ist genau dann wahr,
wenn $P(u)$ für mindestens ein $u \in U$ eine wahre Aussage ist.

Beachte: $\exists x \in U : P(x)$ ist wieder eine Aussage (wenn es keine anderen Variablen als x gibt)!

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ (w)
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$ (w)
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$ (f)
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$ (f)

Existenzquantor bei endlichem Universum

Satz

Sei $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ein **endliches** Universum. Dann gilt
 $\exists u \in U : P(u) \equiv P(u_1) \vee \dots \vee P(u_n)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \exists x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x) \\ \equiv & \text{gerade}(2) \vee \text{gerade}(3) \vee \text{gerade}(4) \vee \text{gerade}(5) \end{aligned}$$

Syntax der prädikatenlogischen Formeln

Zusammenfassend definieren wir:

Definition (Prädikatenlogische Formeln)

Atomare Aussagen sind prädikatenlogische Formeln.

Wenn P n -stelliges Prädikat, dann ist $P(x_1, \dots, x_n)$ eine prädikatenlogische Formel.

Wenn F und G prädikatenlogische Formeln und U ein Universum, dann sind

$$(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \oplus G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G), \forall x \in U : F, \exists x \in U : F$$

prädikatenlogische Formeln.

Bemerkung Auch 0-stellige Prädikate sind erlaubt. Wenn nur solche vorkommen (und keine Quantoren), dann haben wir wieder eine aussagenlogische Formel

Für den Wahrheitswert einer Formel betrachten wir nur **geschlossene** Formeln, d.h. alle x sind unter einem Quantor $\exists x \dots$ oder $\forall x \dots$

Quiz 8

Welche der folgenden Prädikatenlogischen Formeln sind wahr?

- A) $\forall x \in \{1, 2, 3\} : x > 0$
- B) $\forall x \in \{1, 2, 3\} : x > 0 \wedge x < 3$
- C) $\exists x \in \{1, 2, 3\} : x > 0 \wedge x < 3$
- D) $\exists x \in \{1, 2, 3\} : x < 1$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Beispiele

- Wenn zwei Zahlen nicht größer oder kleiner zueinander sind, dann müssen sie gleich sein:

$$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (\neg(x < y) \wedge \neg(y < x)) \rightarrow x = y$$

- Für jede natürliche Zahl, gibt es eine größere natürliche Zahl, die Primzahl ist

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y \wedge y \text{ ist Primzahl}$$

Wenn das Universum U klar ist, dann lassen wir es manchmal weg und schreiben

$$\begin{aligned} & \forall x : F \text{ statt } \forall x \in U : F \\ & (\text{bzw. } \exists x : F \text{ statt } \exists x \in U : F) \end{aligned}$$

Negation von All- und Existenzaussagen

Satz

- $\neg \forall x \in U : P(x) \equiv \exists x \in U : \neg P(x)$
- $\neg \exists x \in U : P(x) \equiv \forall x \in U : \neg P(x)$.

Beispiele für das Schieben der Negation:

- Negation von „Alle Menschen sind schlau“ ist:
„Es gibt (mindestens) einen nicht schlauen Menschen“
- Negation von „Es gibt eine schwere Klausur“ ist:
„Alle Klausuren sind nicht schwer“.
- $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2) \equiv \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq 2$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 2) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$

Quantorregeln

Satz

Es gilt

- $(\forall x \in U : P(x)) \wedge (\forall x \in U : Q(x)) \equiv (\forall x \in U : (P(x) \wedge Q(x)))$
- $(\exists x \in U : P(x)) \vee (\exists x \in U : Q(x)) \equiv (\exists x \in U : (P(x) \vee Q(x)))$

Beispiele:

- „Alle Autos haben ein Lenkrad und alle Autos haben mindestens drei Räder“ ist äquivalent zu
„Alle Autos haben ein Lenkrad und mindestens drei Räder.“
- $(\exists x \in \mathbb{N} : x > 10) \vee (\exists x \in \mathbb{N} : x < 5) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x > 10 \vee x < 5)$.

Falsche Verschiebungen

Beachte:

- $\forall x \in U : (P(x) \vee Q(x))$ **ist nicht gleich zu** $(\forall x \in U : P(x)) \vee (\forall x \in U : Q(x))$
- $\exists x \in U : (P(x) \wedge Q(x))$ **ist nicht gleich zu** $(\exists x \in U : P(x)) \wedge (\exists x \in U : Q(x))$

Beispiele:

- „Für alle Primzahlen p gilt: p ist ungerade oder $p = 2$ “ ist **wahr**, aber
„(Alle Primzahlen sind ungerade) oder (Alle Primzahlen sind gleich zu 2)“
ist **falsch**.
- „Es gibt ein Auto mit drei Rädern und es gibt ein Auto mit vier Rädern“
ist **nicht gleich zu**
„Es gibt ein Auto mit drei und mit vier Rädern“.

Vertauschungsregeln

Satz

Für Universen U_1, U_2 und Formeln F gelten die folgenden Äquivalenzen:

- $\forall x \in U_1 : \forall y \in U_2 : F \equiv \forall y \in U_2 : \forall x \in U_1 : F$
- $\exists x \in U_1 : \exists y \in U_2 : F \equiv \exists y \in U_2 : \exists x \in U_1 : F$

Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y \equiv \forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y$

Gilt **nicht** für unterschiedliche Quantoren:

- $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x^2 = y$ ist **wahr**, aber $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x^2 = y$ ist **falsch**
- „Es gibt einen Studierenden, der alle Aufgaben in der Klausur lösen kann.“
ist nicht äquivalent zu
„Jede Aufgabe der Klausur kann durch irgendeinen Studierenden gelöst werden.“

In vielen sprachlichen und mathematischen Sätzen wird oft implizit allquantifiziert wird, ohne dass der Quantor genannt wird.

Beispiel:

„Die erste binomische Formel lautet:
Für reellwertige a, b gilt $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ “

Implizit ist gemeint, dass diese Gleichung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.