

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

Angewandte Informatik & Technische Informatik

02 Logik

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2025/26

Stand der Folien: 2. Dezember 2025

- ① Aussagen und Aussagenlogik
- ② Gesetze der Aussagenlogik
- ③ Vollständige Mengen von Junktoren
- ④ Anwendungen der Aussagenlogik
- ⑤ Quantoren und prädikatenlogische Formeln

Aussagen und Aussagenlogik



- Wichtige Grundlage der Informatik:
 - Kontrollfluss in Programmen wird durch Logik gesteuert
 - Digitale Schaltungen basieren auf Schaltungslogik
 - Logische Programmiersprachen basieren auf Logiken
 - Inferenzsysteme verwenden logische Schlüsse
 - Spezifikationen in der Programmverifikation werden in Logiken formuliert
 - ...
- Eine Logik ist formal aufgebaut aus
 - Syntax: Wie sehen formal aus?
 - Semantik: Welche Bedeutung haben (syntaktisch richtige) Formeln?

Definition (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein sprachlicher Satz, der entweder **falsch** oder **wahr** ist (aber nie beides gleichzeitig).

Definition (Wahrheitswerte)

Eine **wahre** Aussage hat den Wahrheitswert „ w “ (oder „1“ oder „true“)

Eine **falsche** Aussage hat den Wahrheitswert „ f “ (oder „0“ oder „false“).

- Wiesbaden ist die Landeshauptstadt von Hessen. (w)
- Es gibt beliebig große Primzahlen. (w)
- $10+20 = 42$ (f)
- Alle Informatikstudierenden lieben die Mathematik (unklar, vermutlich f)
- Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen (unbekannt).
Dies ist die Goldbach-Vermutung, die bis heute unbewiesen ist.
- Jedes Java-Programm hält irgendwann an. (f)

- Guten Morgen!
- $5+3$
- Wann ist die Vorlesung endlich vorbei?
- **Keine** Aussage ist folgendes Paradoxon:

„Ich lüge gerade.“

Sowohl die Annahme, es sei wahr, als auch die Annahme, es sei falsch, führen zu einem Widerspruch!

Quiz 1

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?

- A) Die Erde ist eine Scheibe.
- B) Lasst uns feiern!
- C) 2 ist eine Primzahl.
- D) Wann machen wir Pause?
- E) Dieser Satz ist falsch.
- F) Die Kreiszahl π enthält jede beliebige Ziffernfolge.

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 1

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?

- A) Die Erde ist eine Scheibe.
- B) Lasst uns feiern!
- C) 2 ist eine Primzahl.
- D) Wann machen wir Pause?
- E) Dieser Satz ist falsch.
- F) Die Kreiszahl π enthält jede beliebige Ziffernfolge.

Wahrheitsgehalt der Aussagen?

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Aussagen werden durch Variablen $A, B, \dots$ repräsentiert (= aussagenlogische Variablen)

Definition (Aussagenlogische Formeln)

Aussagenlogische Variablen und Wahrheitswerte sind aussagenlogische Formeln

Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, dann auch

$(\neg F)$	(Negation)	„nicht F “
$(F \wedge G)$	(Konjunktion) logisches Und	„ F und G “
$(F \vee G)$	(Disjunktion) logisches Oder	„ F oder G “
$(F \oplus G)$	(Kontravalenz), exklusives Oder	„ F entweder oder G “
$(F \rightarrow G)$	(Implikation)	„wenn F , dann G “
$(F \leftrightarrow G)$	(Äquivalenz) Biimplikation	„ F genau dann, wenn G “

Beispiel: $(A \vee (B \wedge \neg(C \rightarrow w)))$

Die aussagenlogischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, \dots$ nennt man auch **Junktoren**

Wir zählen auch w und f zu den Junktoren (0-stellige Junktoren).

Bedeutung der Junktoren: Sie sind Funktionen auf Wahrheitswerten.
D.h. für Eingaben berechnen sie Ausgaben.

Wir legen sie fest durch Wahrheitstabellen.

Eselsbrücke: $\vee$ „Oder ist oben offen“

A	$\neg A$
w	f
f	w

D.h. $\neg A$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn A falsch ist.

Z.B. ist $\neg(\text{Die Erde ist eine Scheibe})$ eine wahre Aussage.

A	B	$(A \wedge B)$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w



D.h. $(A \wedge B)$ ist genau dann eine wahre Aussage,
wenn **beide** Aussagen A und B wahr sind.

A	B	$(A \vee B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

D.h. $(A \vee B)$ ist genau dann eine wahre Aussage,
wenn **mindestens eine** der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Quiz 2

Welche der folgenden Aussagenlogischen Formeln sind **wahr**?

- A) $w \wedge f$
- B) $f \vee w$
- C) $\neg f$
- D) $\neg w$
- E) $\neg(w \vee f)$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Quiz 3



Hochschule RheinMain

Was stimmt?

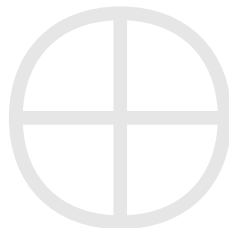
- A) $\wedge$ ist der Junktion für die Konjunktion
- B) $\neg$ ist der Junktor für die Disjunktion
- C) $\vee$ ist der Junktor für die Konjunktion

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



A	B	$(A \oplus B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f



D.h. $(A \oplus B)$ ist genau dann eine wahre Aussage,
wenn **genau eine** der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Semantik der Implikation

Die Implikation hat die folgende Semantik:

A	B	$(A \rightarrow B)$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \rightarrow B)$ ist genau dann wahr,
wenn A **falsch** ist **oder** A und B **beide wahr** sind.



Semantik der Äquivalenz

hsrm*



A	B	$(A \leftrightarrow B)$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \leftrightarrow B)$ ist genau dann wahr,
wenn A und B **denselben Wahrheitswert** haben.

Quiz 4

Welche der folgenden Aussagenlogischen Formeln sind **wahr**?

- A) $w \oplus w$
- B) $f \rightarrow w$
- C) $f \leftrightarrow f$
- D) $w \rightarrow f$
- E) $w \leftrightarrow \neg f$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 5

Ordne die Bezeichnungen den Junktoren von oben nach unten zu

1. $\wedge$
2. $\vee$
3. $\rightarrow$
4. $\oplus$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Kontravalenz	Implikation	Äquivalenz
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	f	w	w
f	w		f	w	w	w	f
w	f	f	f	w	w	f	f
w	w		w	w	f	w	w

Der Wahrheitswert der Formeln hängt ab vom Wahrheitswert der Variablen.

Eine **Belegung** $\mathcal{B}$ weist (endlich vielen) aussagenlogischen Variablen einen Wahrheitswert zu.

Belegung $\mathcal{B}$ für F weist mindestens allen Variablen aus F einen Wahrheitswert zu.

$\mathcal{B}(F)$: „Wahrheitswert von F unter der Belegung $\mathcal{B}$ “

- 1 Ersetze A durch $\mathcal{B}(A)$ in F .
- 2 Werte danach die Junktoren von innen nach außen aus.

Formel $F = ((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow A))$.

Belegung $\mathcal{B}_1 = \{A \mapsto f, B \mapsto f, C \mapsto w\}$

Berechne $\mathcal{B}_1(F)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1(F) &= \mathcal{B}_1((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow A)) \\ &= ((\mathcal{B}_1(A) \wedge \neg \mathcal{B}_1(B)) \rightarrow \neg(\mathcal{B}_1(C) \rightarrow \mathcal{B}_1(A))) \\ &= ((f \wedge \neg f) \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\ &= ((f \wedge w) \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\ &= (f \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\ &= (f \rightarrow \neg f) \\ &= (f \rightarrow w) \\ &= w\end{aligned}$$

Wahrheitswert für alle Belegungen

Verwende eine Wahrheitstabelle:

- Spalten für alle Variablen
- Spalten für alle Teilformeln
- Zeilen für jede mögliche Belegung der Variablen
- Sukzessive Auswertung der Teilformeln, bis man bei der Gesamtformel ist.

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 1:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 2:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f					
f	f	w					
f	w	f					
f	w	w					
w	f	f					
w	f	w					
w	w	f					
w	w	w					

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 3:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w				
f	f	w	w				
f	w	f	f				
f	w	w	f				
w	f	f	w				
w	f	w	w				
w	w	f	f				
w	w	w	f				

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 4:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f			
f	f	w	w	f			
f	w	f	f	f			
f	w	w	f	f			
w	f	f	w	w			
w	f	w	w	w			
w	w	f	f	f			
w	w	w	f	f			

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 5:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f		
f	f	w	w	f	w		
f	w	f	f	f	f		
f	w	w	f	f	w		
w	f	f	w	w	w		
w	f	w	w	w	w		
w	w	f	f	f	w		
w	w	w	f	f	w		

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 6:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f	w	
f	f	w	w	f	w	f	
f	w	f	f	f	f	w	
f	w	w	f	f	w	f	
w	f	f	w	w	w	f	
w	f	w	w	w	w	f	
w	w	f	f	f	w	f	
w	w	w	f	f	w	f	

Beispiel

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Schritt 7:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w
f	w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	w	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f
w	w	f	f	f	w	f	w
w	w	w	f	f	w	f	w

GESETZE DER AUSSAGENLOGIK

- Gesetze von de Morgan
- Gesetze der Booleschen Algebra
- Dualität
- Weitere Rechengesetze



Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

$$\text{Beispiel: } \neg A \vee B \wedge C \rightarrow D$$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $\neg A \vee B \wedge C \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(\neg A) \vee B \wedge C \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

$$\text{Beispiel: } (\neg A) \vee B \wedge C \rightarrow D$$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

$$\text{Beispiel: } (\neg A) \vee (B \wedge C) \rightarrow D$$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

$$\text{Beispiel: } (\neg A) \vee (B \wedge C) \rightarrow D$$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

$$\text{Beispiel: } ((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee B) \wedge C$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg > \wedge > \oplus > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$

Assoziativität: $A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C$ oder $\dots = A \vee (B \vee C)$? später...

Definition (Tautologie)

Eine aussagenlogische Formel, die für **jede Belegung wahr** ist, nennt man eine **Tautologie** (oder **allgemeingültige Formel**)

Tautologien sind die **Sätze der Logik**.

Beispiel: $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie, denn

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
f	f	f	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	w

Definition (Widerspruch)

Eine aussagenlogische Formel, die für **jede Belegung falsch** ist, nennt man eine **Kontradiktion** (oder **Widerspruch**)

Beispiel:

$A \wedge \neg A$ ist eine Kontradiktion, denn

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
f	w	f
w	f	f

Definition (Erfüllbarkeit und Widerlegbarkeit)

Sei F eine aussagenlogische Formel

- Wenn F für **mindestens eine** Belegung **wahr** ist, dann heißt F **erfüllbar**.
- Wenn F für **mindestens eine** Belegung **falsch** ist, dann heißt F **widerlegbar**

Beispiele:

- $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie, damit auch erfüllbar, aber nicht widerlegbar.
- $A \wedge \neg A$ eine Kontradiktion, damit auch widerlegbar, aber nicht erfüllbar.
- $A \wedge B$ ist erfüllbar und widerlegbar, denn

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
w	w	w

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Nachweis $F \equiv G$: Wahrheitstabelle mit allen Belegungen und mit Spalten für F und G .
Diese dann vergleichen

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Nachweis $F \equiv G$: Wahrheitstabelle mit allen Belegungen und mit Spalten für F und G .
Diese dann vergleichen

Beispiel: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ gilt, denn:

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
f	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
w	w	f	w	w

Satz

Zwei Formeln F und G sind genau dann logisch äquivalent, wenn $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie ist.

Beweis (Skizze): Zwei Richtungen.

- „Wenn $F \equiv G$, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie.“
- „Wenn $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie ist, dann gilt $F \equiv G$.“

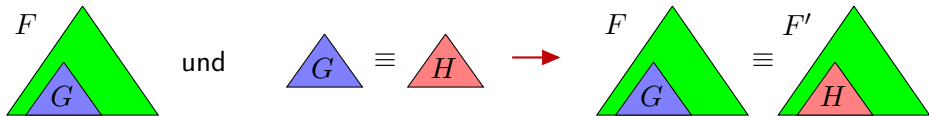
In beiden Fällen kann man über alle Belegungen argumentieren (siehe Skript).

Logische äquivalente (Teil-)Formeln darf man austauschen:

Satz

Sei F eine aussagenlogische Formel, die die Formel G als Teilformel enthält. Sei $G \equiv H$. Dann gilt $F \equiv F'$, wobei F' aus F entsteht, indem die Teilformel G durch H ersetzt wird.

Skizze dazu:



Beweis: Argumentiere über die Berechnung mit der Wahrheitstabelle.

Definition (Substitution)

Seien $F, G_1, \dots, G_n$ Formeln und $A_1, \dots, A_n$ aussagenlogische Variablen. Dann bezeichne $F[G_1/A_1, \dots, G_n/A_n]$ die Formel, die entsteht, indem jeweils für $1 \leq i \leq n$ alle Vorkommen von A_i in F durch die Formel G_i ersetzt werden.

Bemerkung: Die Substitution ist parallel durchzuführen, denn

$$F[G/A][H/B] \neq F[G/A, H/B] \text{ wenn } B \text{ in } G \text{ vorkommt}$$

Satz

Seien F, G, H aussagenlogische Formeln, A eine aussagenlogische Variable. Wenn $F \equiv G$ gilt, dann gilt auch $F[H/A] \equiv G[H/A]$

Satz von den Morgan

Seien F und G aussagenlogische Formeln. Dann gilt

Erstes de Morgansches Gesetz: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$

Zweites de Morgansches Gesetz: $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

Beweis. Es genügt, die Teilformeln F und G wie aussagenlogische Variablen zu behandeln (wegen letztem Satz).

Wahrheitstabelle:

F	G	$(F \wedge G)$	$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$	$\neg F \vee \neg G$
f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	f	f	f	f

Das zweite Gesetz lässt sich analog beweisen.



Satz (Rechengesetze für $\wedge$, $\vee$, $\neg$)

Für alle aussagenlogischen Formeln F, G, H gelten die folgenden Gesetze:

- Kommutativgesetze: $F \wedge G \equiv G \wedge F$ und $F \vee G \equiv G \vee F$
- Assoziativgesetz: $(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$ und $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$
- Distributivgesetze: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ und $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
- Existenz neutraler Elemente: $F \wedge w \equiv F$ und $F \vee f \equiv F$
- Existenz des Komplements: $F \wedge \neg F \equiv f$ und $F \vee \neg F \equiv w$

Alle Gesetze können mit Wahrheitstabellen bewiesen werden.

Wir machen es nur für das 1. Distributivgesetz

Beweis des 1. Distributivgesetzes

F	G	H	$G \wedge H$	$F \vee (G \wedge H)$	$F \vee G$	$F \vee H$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$
f	f	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w

Satz

$\oplus$ ist kommutativ und assoziativ.

Beweis. Übungsaufgabe

Da $\vee, \wedge, \oplus$ assoziativ sind, lassen wir Klammern manchmal weg und schreiben $F \vee G \vee H$, $F \wedge G \wedge H$ bzw. $F \oplus G \oplus H$.

Quiz 6



Hochschule RheinMain

Was stimmt?

- A) $\neg(A \vee \neg B) \equiv \neg A \wedge \neg \neg B$ gilt aufgrund der Gesetze von de Morgan
- B) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ gilt aufgrund des Assoziativgesetzes
- C) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ gilt aufgrund des Kommutativgesetzes
- D) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ gilt aufgrund des Distributivgesetzes

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Quiz 7



Hochschule RheinMain

Ausmultiplizieren von $A \wedge (B \vee C)$ mit dem Distributivgesetz ergibt:

- A) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- B) $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$
- C) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- D) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Eine Menge mit ausgezeichneten Elementen w, f und Operationen $\wedge, \vee, \neg$ auf dieser Menge, für welche die

- Kommutativgesetze,
- Assoziativgesetze,
- Distributivgesetze,
- Existenz neutraler Elemente und
- Existenz des Komplements

gelten, nennt man **Boolesche Algebra** (benannt George Boole).

D.h. insbesondere $(\{f, w\}, \wedge, \vee, \neg)$ wie zuvor definiert, ist eine Boolesche Algebra.
Es gibt auch weitere Boolesche Algebren.

Die Rechengesetze bestehen immer aus zwei symmetrischen Teilen:

Man erhält den einen Teil aus dem Anderen, indem man

$\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauscht.

Diese Eigenschaft der Booleschen Algebra nennt man **Dualität**

Ein Satz ist **dual** zu einem anderen Satz, wenn man ihn erhält, indem man $\wedge$ mit $\vee$ sowie f mit w vertauscht.

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
- Idempotenzgesetze: $F \vee F \equiv F$ und $F \wedge F \equiv F$
- Involutionsgesetz (doppelte Negation): $\neg(\neg F) \equiv F$
- Extremalgesetze: $F \vee w \equiv w$ und $F \wedge f \equiv f$

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

1. Absorptionsgesetz:

$$\begin{aligned} & F \wedge (F \vee G) \\ \equiv & (F \vee f) \wedge (F \vee G) && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\ \equiv & (F \vee (f \wedge G)) && \text{(Distributivgesetz)} \\ \equiv & (F \vee (G \wedge f)) && \text{(Kommutativgesetz)} \\ \equiv & (F \vee f) && \text{(Extremalgesetz)} \\ \equiv & F && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \end{aligned}$$

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

$$\begin{aligned} \text{1. Absorptionsgesetz: } & F \wedge (F \vee G) \\ & \equiv (F \vee f) \wedge (F \vee G) && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\ & \equiv (F \vee (f \wedge G)) && \text{(Distributivgesetz)} \\ & \equiv (F \vee (G \wedge f)) && \text{(Kommutativgesetz)} \\ & \equiv (F \vee f) && \text{(Extremalgesetz)} \\ & \equiv F && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \end{aligned}$$

Aufgrund der Dualität können wir in allen Zwischenschritten $\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauschen, was direkt das zweite Absorptionsgesetz zeigt.

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

1. Absorptionsgesetz:

$$\begin{aligned} & F \vee (F \wedge G) \\ \equiv & (F \wedge w) \vee (F \wedge G) && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\ \equiv & (F \wedge (f \vee G)) && \text{(Distributivgesetz)} \\ \equiv & (F \wedge (G \vee w)) && \text{(Kommutativgesetz)} \\ \equiv & (F \wedge w) && \text{(Extremalgesetz)} \\ \equiv & F && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \end{aligned}$$

Aufgrund der Dualität können wir in allen Zwischenschritten $\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauschen, was direkt das zweite Absorptionsgesetz zeigt.

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Idempotenzgesetze: $F \vee F \equiv F$ und $F \wedge F \equiv F$

Beweis des 1. Idempotenzgesetz:

$$\begin{aligned} & F \vee F \\ & \equiv F \vee (F \wedge w) \quad (\text{Existenz neutraler Elemente}) \\ & \equiv F \quad (\text{Absorptionsgesetz}) \end{aligned}$$

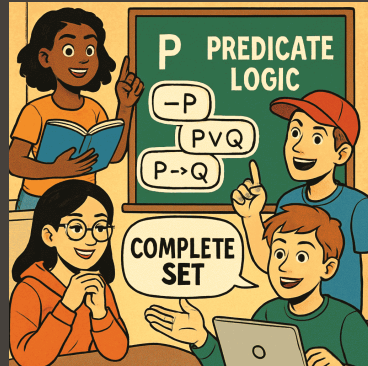
Da das 1. Absorptionsgesetz dual zum 2. Absorptionsgesetz ist, folgt das 2. Idempotenzgesetz mittels der Dualität.

Wir vereinfachen die Formel $\neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B)$

$$\begin{aligned} & \neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B) \\ \equiv & (\neg A \wedge \neg \neg B) \vee (A \wedge B) && \text{(De Morgansches Gesetz)} \\ \equiv & (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) && \text{(Involutionsgesetz)} \\ \equiv & (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge A) && \text{(Kommutativgesetz, 2 Mal)} \\ \equiv & B \wedge (\neg A \vee A) && \text{(Distributivgesetz)} \\ \equiv & B \wedge (A \vee \neg A) && \text{(Kommutativgesetz)} \\ \equiv & B \wedge w && \text{(Komplement)} \\ \equiv & B && \text{(Neutrale Elemente)} \end{aligned}$$

VOLLSTÄNDIGKEIT VON JUNKTOREN

- Boolesche Funktionen
- Vollständige Menge von Junktoren



Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?

Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?

0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.

Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?

0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.

1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f , konstant w , Negation

Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?

0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.

1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f , konstant w , Negation

2-stellig: ...

Formel F mit Variablen $A_1, \dots, A_n$ ist wie **Boolesche Funktion** $h(A_1, \dots, A_n)$

Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?

0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.

1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f , konstant w , Negation

2-stellig: ...

Satz

Für jede Boolesche Funktion h gibt es eine aussagenlogische Formel, die h berechnet.

Beweisidee:

- Gegeben: Wahrheitstabelle für h .
- Für jede „ w “-Zeile: Bilde Konjunktion entsprechend der Belegung.
- Gesamtformel F : Disjunktion der Konjunktionen.
- $\mathcal{B}(F)$ ist genau dann wahr, wenn $h(\mathcal{B}(A_1), \dots, \mathcal{B}(A_n))$ wahr ist.

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge C$$

$$A \wedge B \wedge C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge C$$

$$A \wedge B \wedge C$$

$$F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Eine solche Disjunktion von Konjunktionen nennt man auch **Disjunktive Normalform**.

Definition (Vollständige Menge)

Eine Menge M von Junktoren heißt **vollständig**, wenn für jede aussagenlogische Formel eine logisch äquivalente Formel existiert, die nur die Junktoren aus M benutzt.

Beispiele:

- $\{w, f, \vee, \wedge\}$ nicht vollständig, denn z.B. für $\neg A$ keine logisch äquivalente Formel
- $\{\vee, \wedge, \neg\}$ vollständig, denn

$$\begin{array}{lll} w \equiv A \vee \neg A & f \equiv A \wedge \neg A & F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \\ F \leftrightarrow G \equiv F \rightarrow G \wedge G \rightarrow F & F \oplus G \equiv (F \vee G) \wedge \neg(F \wedge G) & \end{array}$$

- $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ jeweils vollständig, denn

$$F \wedge G \equiv \neg(\neg F \vee \neg G) \qquad F \vee G \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G)$$

ANWENDUNGEN DER AUSSAGENLOGIK

- Digitale Schaltungen
- SAT-Solving



Schaltkreise sind aussagenlogische Formeln.

Beispiel: 2-aus-3-Schaltung: Die Wahrheitstabelle der gesuchten Funktion h :

A	B	C	$h(A, B, C)$
f	f	f	f
f	f	w	f
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	w
w	w	f	w
w	w	w	w



Disjunktive NF $F := (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

$$F := (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

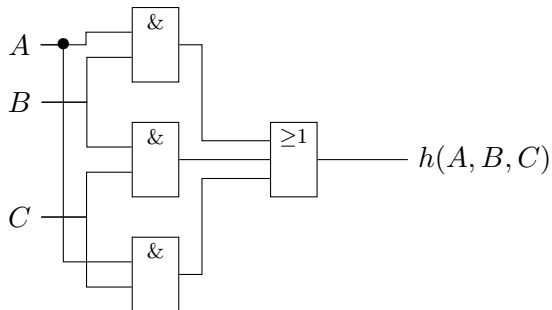
kann man vereinfachen:

$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$	
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \vee (\neg C \wedge C))$	(Ausklammern von $A \wedge B$)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \wedge w)$	(Existenz des Komplements)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B)$	(Idempotenzgesetz)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee B))$	(Ausklammern von A)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge ((B \vee \neg B) \wedge (B \vee C)))$	(Ausmultiplizieren)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (w \wedge (B \vee C)))$	(Existenz des Komplements)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (B \vee C))$	(Idempotenzgesetz)
$\equiv (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(Ausmultiplizieren)
$\equiv (C \wedge ((\neg A \wedge B) \vee A)) \vee (A \wedge B)$	(Ausklammern von C)
$\equiv (C \wedge ((A \vee \neg A) \wedge (A \vee B))) \vee (A \wedge B)$	(Ausmultiplizieren)
$\equiv (C \wedge (w \wedge (A \vee B))) \vee (A \wedge B)$	(Existenz des Komplements)
$\equiv (C \wedge ((A \vee B))) \vee (A \wedge B)$	(Idempotenzgesetz)
$\equiv (C \wedge A) \vee (C \wedge B) \vee (A \wedge B)$	(Ausmultiplizieren)

Es gibt dafür spezielle Verfahren (KV-Diagramme) und Tools z.B. wolframalpha.com.

$$F \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Schaltkreis dazu



Dabei ist:



ein Und-Gatter



ein Oder-Gatter

- Idee: Kodiere Problem als aussagenlogische Formel
- Ziel: Finde erfüllende Belegung eine Formel (nennt man auch **Modell**)
- Erfüllende Belegung = Lösung des Problems / Rätsels etc.
- Softwarewerkzeug zum Finden des Modells: SAT-Solver (SAT = satisfiability)
- Wir betrachten als Beispiel ein Rätsel von Raymond Smullyan.

Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- ① Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- ② Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- ③ Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- ④ Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- 1 Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- 2 Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- 3 Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- 4 Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H , S und M für Hutmacher / Schnappphase / Maus ist schuldig.

Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- ① Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- ② Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- ③ Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- ④ Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H , S und M für Hutmacher / Schnappphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$

Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- ① Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- ② Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- ③ Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- ④ Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H , S und M für Hutmacher / Schnappphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$

Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- ① Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- ② Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- ③ Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- ④ Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H , S und M für Hutmacher / Schnappphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$
- Für 2. und 4.: $\neg H \rightarrow \neg M$

Wer ist der Pfefferdieb?

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

- ① Genau einer von ihnen ist der Dieb.
- ② Unschuldige sagen immer die Wahrheit
- ③ Schnappphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
- ④ Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig



Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H , S und M für Hutmacher / Schnappphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$
- Für 2. und 4.: $\neg H \rightarrow \neg M$

Gesamtformel:

$$(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M)$$

Vereinfachen

$$\begin{aligned} & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \end{aligned}$$

Dies ist eine **Konjunktive Normalform** (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Vereinfachen

$$\begin{aligned} & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \end{aligned}$$

Dies ist eine **Konjunktive Normalform** (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format

(1 = H , 2 = M , 3 = S)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

Vereinfachen

$$\begin{aligned} & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \end{aligned}$$

Dies ist eine **Konjunktive Normalform** (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format
(1 = H , 2 = M , 3 = S)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

Ausgabe (z.B. msoos.github.io/cryptominisat_web)

```
SAT -1 -2 3
```

Erfüllende Belegung ist:

$\{H \mapsto f, M \mapsto f, S \mapsto w\}$

D.h. ?

Vereinfachen

$$\begin{aligned} & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\ \equiv & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \end{aligned}$$

Dies ist eine **Konjunktive Normalform** (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format
(1 = H , 2 = M , 3 = S)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

Ausgabe (z.B. msoos.github.io/cryptominisat_web)

```
SAT -1 -2 3
```

Erfüllende Belegung ist:

$\{H \mapsto f, M \mapsto f, S \mapsto w\}$

D.h. **der Schnapphase war es!**

FORMELN MIT QUANTOREN

- Aussageformen
- All- und Existenzquantoren
- Prädikatenlogische Formeln



- Wir machen die Betrachtung nicht ganz formal
- Lernziel: Umgang mit Quantoren beherrschen
- Genaue Semantik ist Inhalt vertiefender Veranstaltungen

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „ x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „ x ist eine Primzahl“ ist **keine** Aussage!

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „ x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „ x ist eine Primzahl“ ist **keine** Aussage!
- **Aussageform**: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „ x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „ x ist eine Primzahl“ ist **keine** Aussage!
- **Aussageform**: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

Aussageform „ x ist eine Primzahl“

- 2 für x einsetzen: Man erhält eine wahre Aussage
- 4 für x einsetzen: Man erhält eine falsche Aussage

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „ x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „ x ist eine Primzahl“ ist **keine** Aussage!
- **Aussageform**: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

Aussageform „ x ist eine Primzahl“

- 2 für x einsetzen: Man erhält eine wahre Aussage
- 4 für x einsetzen: Man erhält eine falsche Aussage
- Grün für x einsetzen: Das ist nicht gewollt!
- Die Menge der Werte für x sollte einschränkbar sein.

Ein solche **Menge für Objektvariablen** nennt man **Universum**

- „ x ist eine Primzahl“ $\rightarrow$ sinnvolles Universum für x : $\mathbb{N}$
- „ x ist eine Farbe der additiven Farbmischung“
 $\rightarrow$ sinnvolles Universum für x : alle Farben
- „Man benötigt x Fußballspieler:innen pro Team, damit ein Spiel angepfiffen werden darf.“
 $\rightarrow$ sinnvolles Universum: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Definition (Aussageform)

Seien $x_1, \dots, x_n$ Variablen und $U_1, \dots, U_n$ Universen. Dann ist eine **Aussageform** ein Satz mit Variablen $x_1, \dots, x_n$, sodass nach Ersetzen aller Variablen x_i durch Objekte $u_i \in U_i$ ein Satz entsteht der wahr oder falsch ist.

- In der Aussagenlogik: Variablen $A, B, \dots$ für Aussagen
- Jetzt: Variablen $P, Q, \dots$ für Aussageformen
- Um die Anzahl und Namen der Objektvariablen von P festzulegen: $P(x_1, \dots, x_n)$
 P ist dann n -stellig.
- $P, Q, \dots$ nennt man auch Prädikatensymbole

Beispiel:

- $P_1(x) = „x \text{ ist Primzahl}“$
- Verwende dann $P_1(x)$ in den Formeln
- $P_1(2)$ meint dann die Aussage „2 ist Primzahl“.

Beispiel mit 3-stelligem Prädikatensymbol:

- $Q(x, y, z) := x + y = z$
- $Q(1, 2, 3)$ ist eine wahre Aussage, $Q(2, 2, 3)$ ist eine falsche Aussage

Allaussagen sind Aussagen über **alle Elemente eines Universums**.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Allaussagen sind Aussagen über **alle Elemente eines Universums**.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt

gebracht werden.

Allaussagen sind Aussagen über **alle Elemente eines Universums**.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt

gebracht werden.

Allaussagen sind Aussagen über **alle Elemente eines Universums**.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
Für alle x aus der Menge der Dreiecke gilt: Winkelsumme von x ist 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt

gebracht werden.

Allaussagen sind Aussagen über **alle Elemente eines Universums**.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
Für alle x aus der Menge der Dreiecke gilt: Winkelsumme von x ist 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.
Für alle x aus $\{15, 27, 69\}$ gilt: x ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt

gebracht werden.

„Für alle x aus einem Universum U gilt $P(x)$ “

wird mit neuer Syntax (dem **Allquantor** $\forall$) ausgedrückt als

$$\forall x \in U : P(x)$$



Semantik des Allquantors

$\forall x \in U : P(x)$ ist genau dann wahr,
wenn $P(u)$ für jedes $u \in U$ eine wahre Aussage ist.

Beachte: $\forall x \in U : P(x)$ ist wieder eine Aussage (wenn es keine anderen Variablen als x gibt)!

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
- $\forall x \in \{17, 39, 47\} : \text{ungerade}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{N} : \text{Wenn } x \text{ Primzahl, dann ist } x \text{ ungerade}$
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x)$

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\} : \text{ungerade}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{N} : \text{Wenn } x \text{ Primzahl, dann ist } x \text{ ungerade}$
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x)$

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\} : \text{ungerade}(x)$ (w)
- $\forall x \in \mathbb{N} : \text{Wenn } x \text{ Primzahl, dann ist } x \text{ ungerade}$
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x)$

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\} : \text{ungerade}(x)$ (w)
- $\forall x \in \mathbb{N} : \text{Wenn } x \text{ Primzahl, dann ist } x \text{ ungerade}$ (f)
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x)$

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\} : \text{ungerade}(x)$ (w)
- $\forall x \in \mathbb{N} : \text{Wenn } x \text{ Primzahl, dann ist } x \text{ ungerade}$ (f)
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x)$ (f)

Satz

Sei $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ein **endliches** Universum. Dann gilt
 $\forall u \in U : P(u) \equiv P(u_1) \wedge \dots \wedge P(u_n).$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x) \\ \equiv & \text{gerade}(2) \wedge \text{gerade}(3) \wedge \text{gerade}(4) \wedge \text{gerade}(5) \end{aligned}$$

Existenzaussagen fordern, dass **mindestens ein Element eines Universums** eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.

Existenzaussagen fordern, dass **mindestens ein Element eines Universums** eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U , für das gilt

gebracht werden.

Existenzaussagen fordern, dass **mindestens ein Element eines Universums** eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$, für das gilt: x ist gerade Primzahl
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U , für das gilt

gebracht werden.

Existenzaussagen fordern, dass **mindestens ein Element eines Universums** eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$, für das gilt: x ist gerade Primzahl
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.
Es gibt ein $x \in \{1, 3, 5, 7, 8\}$, für das gilt: x ist gerade

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U , für das gilt

gebracht werden.

Es gibt ein x aus einem Universum U , für das gilt: $P(x)$

wird mit neuer Syntax (dem **Existenzquantor** $\exists$) ausgedrückt als

$$\exists x \in U : P(x)$$



Semantik des Existenzquantors

$\exists x \in U : P(x)$ ist genau dann wahr,
wenn $P(u)$ für mindestens ein $u \in U$ eine wahre Aussage ist.

Beachte: $\exists x \in U : P(x)$ ist wieder eine Aussage (wenn es keine anderen Variablen als x gibt)!

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \text{ (w)}$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ (w)
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$ (w)
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ (w)
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$ (w)
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$ (f)
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ (w)
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$ (w)
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$ (f)
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$ (f)

Satz

Sei $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ ein **endliches** Universum. Dann gilt
 $\exists u \in U : P(u) \equiv P(u_1) \vee \dots \vee P(u_n).$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \exists x \in \{2, 3, 4, 5\} : \text{gerade}(x) \\ \equiv & \text{gerade}(2) \vee \text{gerade}(3) \vee \text{gerade}(4) \vee \text{gerade}(5) \end{aligned}$$

Quiz 8



Hochschule RheinMain

Welche der folgenden Prädikatenlogischen Formeln sind wahr?

- A) $\forall x \in \{1, 2, 3\} : x > 0$
- B) $\forall x \in \{1, 2, 3\} : x > 0 \wedge x < 3$
- C) $\exists x \in \{1, 2, 3\} : x > 0 \wedge x < 3$
- D) $\exists x \in \{1, 2, 3\} : x < 1$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Zusammenfassend definieren wir:

Definition (Prädikatenlogische Formeln)

Atomare Aussagen sind prädikatenlogische Formeln.

Wenn P n -stelliges Prädikat, dann ist $P(x_1, \dots, x_n)$ eine prädikatenlogische Formel.

Wenn F und G prädikatenlogische Formeln und U ein Universum, dann sind

$$(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \oplus G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G), \forall x \in U : F, \exists x \in U : F$$

prädikatenlogische Formeln.

Bemerkung Auch 0-stellige Prädikate sind erlaubt. Wenn nur solche vorkommen (und keine Quantoren), dann haben wir wieder eine aussagenlogische Formel

Für den Wahrheitswert einer Formel betrachten wir nur **geschlossene** Formeln, d.h. alle x sind unter einem Quantor $\exists x \dots$ oder $\forall x \dots$

- Wenn zwei Zahlen nicht größer oder kleiner zueinander sind, dann müssen sie gleich sein:

$$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (\neg(x < y) \wedge \neg(y < x)) \rightarrow x = y$$

- Für jede natürliche Zahl, gibt es eine größere natürliche Zahl, die Primzahl ist

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y \wedge y \text{ ist Primzahl}$$

Wenn das Universum U klar ist, dann lassen wir es manchmal weg und schreiben

$$\forall x : F \text{ statt } \forall x \in U : F \\ (\text{bzw. } \exists x : F \text{ statt } \exists x \in U : F)$$

Satz

- $\neg \forall x \in U : P(x) \equiv \exists x \in U : \neg P(x)$
- $\neg \exists x \in U : P(x) \equiv \forall x \in U : \neg P(x).$

Beispiele für das Schieben der Negation:

- Negation von „Alle Menschen sind schlau“ ist:
„Es gibt (mindestens) einen nicht schlauen Menschen“
- Negation von „Es gibt eine schwere Klausur“ ist:
„Alle Klausuren sind nicht schwer“.
- $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2) \equiv \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq 2$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 2) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$

Satz

Es gilt

- $(\forall x \in U : P(x)) \wedge (\forall x \in U : Q(x)) \equiv (\forall x \in U : (P(x) \wedge Q(x)))$
- $(\exists x \in U : P(x)) \vee (\exists x \in U : Q(x)) \equiv (\exists x \in U : (P(x) \vee Q(x)))$

Beispiele:

- „Alle Autos haben ein Lenkrad und alle Autos haben mindestens drei Räder“ ist äquivalent zu
„Alle Autos haben ein Lenkrad und mindestens drei Räder.“.
- $(\exists x \in \mathbb{N} : x > 10) \vee (\exists x \in \mathbb{N} : x < 5) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x > 10 \vee x < 5).$

Beachte:

- $\forall x \in U : (P(x) \vee Q(x))$ **ist nicht gleich zu** $(\forall x \in U : P(x)) \vee (\forall x \in U : Q(x))$
- $\exists x \in U : (P(x) \wedge Q(x))$ **ist nicht gleich zu** $(\exists x \in U : P(x)) \wedge (\exists x \in U : Q(x))$

Beispiele:

- „Für alle Primzahlen p gilt: p ist ungerade oder $p = 2$ “ ist **wahr**, aber
„(Alle Primzahlen sind ungerade) oder (Alle Primzahlen sind gleich zu 2)“
ist **falsch**.
- „Es gibt ein Auto mit drei Rädern und es gibt ein Auto mit vier Rädern“
ist **nicht gleich** zu
„Es gibt ein Auto mit drei und mit vier Rädern“.

Satz

Für Universen U_1, U_2 und Formeln F gelten die folgenden Äquivalenzen:

- $\forall x \in U_1 : \forall y \in U_2 : F \equiv \forall y \in U_2 : \forall x \in U_1 : F$
- $\exists x \in U_1 : \exists y \in U_2 : F \equiv \exists y \in U_2 : \exists x \in U_1 : F$

Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y \equiv \forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y$

Satz

Für Universen U_1, U_2 und Formeln F gelten die folgenden Äquivalenzen:

- $\forall x \in U_1 : \forall y \in U_2 : F \equiv \forall y \in U_2 : \forall x \in U_1 : F$
- $\exists x \in U_1 : \exists y \in U_2 : F \equiv \exists y \in U_2 : \exists x \in U_1 : F$

Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y \equiv \forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y$

Gilt **nicht** für unterschiedliche Quantoren:

- $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x^2 = y$ ist **wahr**, aber $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x^2 = y$ ist **falsch**
- „Es gibt einen Studierenden, der alle Aufgaben in der Klausur lösen kann.“
ist **nicht äquivalent zu**
„Jede Aufgabe der Klausur kann durch irgendeinen Studierenden gelöst werden.“

In vielen sprachlichen und mathematischen Sätzen wird oft implizit allquantifiziert wird, ohne dass der Quantor genannt wird.

Beispiel:

„Die erste binomische Formel lautet:
Für reellwertige a, b gilt $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ “

Implizit ist gemeint, dass diese Gleichung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.