

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

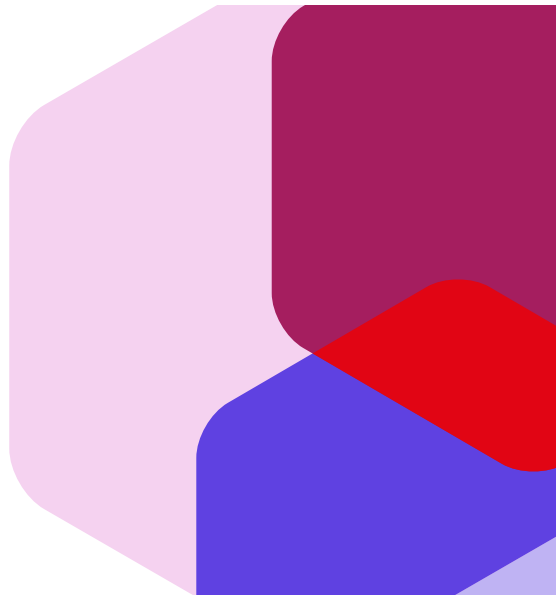
Angewandte Informatik & Technische Informatik

03 Mengen

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2025/26

Stand der Folien: 2. Dezember 2025

Bildnachweis: Alle Bilder sind selbst gezeichnet oder generiert mit KI von OpenAI unter <https://xt.hi-rh.de>

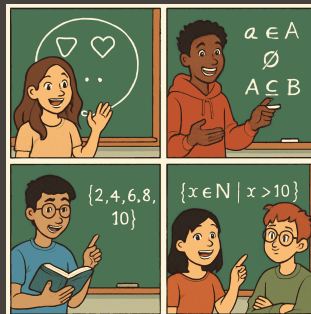


Inhalt

- ➊ Mengen beschreiben
- ➋ Operationen auf Mengen
- ➌ Mengen und Logik
- ➍ Kartesisches Produkt
- ➎ Mächtigkeiten und Zählformeln

MENGEN BESCHREIBEN

- Was sind Mengen?
- Grundlegende Notationen
- Mengen beschreiben durch Aufzählen
- Mengen beschreiben durch Eigenschaften



Was sind Mengen?

Georg Cantors Definition

„Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Baut man darauf auf, so kann dies zu **Widersprüchen** führen!

Russellsche Antinomie

- Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$
- R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
- Aber weder $R \in R$ noch $R \notin R$ kann gelten (Widerspruch!).

→ Definition von Mengen ist schwierig (axiomatische Mengenlehre)

Wir machen keine Mengendefinition, sondern beschreiben Mengen durch Aufzählen / durch Eigenschaften

Grundlegende Begriffe und Notationen

- Die Objekte einer Menge nennt man **Elemente**.
- Eine Menge können wir aufschreiben, indem wir die Elemente aufzählen.

Definition (Notation für Mengen)

- Elemente einer Menge werden mit Kommas getrennt und durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umschlossen.
- Wenn Objekt m in Menge M enthalten ist, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
- Die **leere Menge** $\emptyset$ oder $\{\}$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$ die Menge der Zahlen 1,2 und 3
- $\{\text{Schwarz, Weiß}\}$ ist die Menge der Farben Schwarz und Weiß
- $4 \in \{2, 4, 6, 9\}$ und $5 \notin \{2, 4, 6, 9\}$
- $4 \notin \emptyset$ und $\text{Weiß} \notin \{\}$

Gleichheit und Teilmengen

Definition

- Menge M ist eine **Teilmenge** von N ($M \subseteq N$) wenn $\forall x \in M : x \in N$ gilt.
- Menge M ist eine **echte Teilmenge** von N , ($M \subset N$) wenn $M \subseteq N \wedge \exists y \in N : y \notin M$.
- Mengen M und N sind **gleich** ($M = N$), wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

- Die Reihenfolge der Elemente spielt in einer Menge keine Rolle.
- Ebenso werden Elemente in einer Menge nicht mehrfach betrachtet.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

Quiz 1

Welche der folgenden Mengen sind gleich zur Menge $\{1, 2, 3\}$?

- A) $\{3, 2, 1\}$
- B) $\{1, 2, 1, 2, 3\}$
- C) $\{1, 2, 3, 3\}$
- D) $\{11, 22, 33\}$
- E) $\{\{1, 2, 3\}\}$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 2

Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3\}$ und $C = \{3, 2\}$.

Was stimmt?

- A) $A \subseteq B$
- B) $B \subset C$
- C) $C \subseteq A$
- D) $B \subseteq C$
- E) $B \subset C$

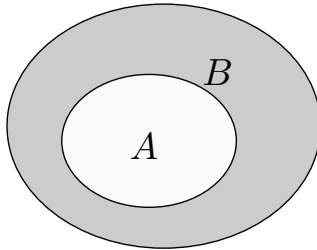
arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Venn-Diagramme

Graphische Darstellung von Mengen und deren Beziehungen (benannt nach John Venn)

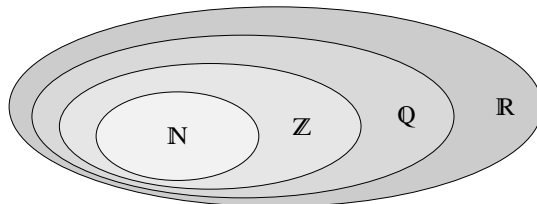
Gilt $A \subset B$ so zeichnet man:



Zahlenmengen (2)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Zahlenmengen

Definition (Zahlenmengen)

Wir definieren Symbole für bekannte Zahlenmengen:

- Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der natürlichen Zahlen und 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} :=$ alle gekürzten Brüche, bzw. endliche oder periodische Dezimalzahlen.
- Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R} :=$ alle Dezimalzahlen.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaft

Definition (Mengenbeschreibung durch Eigenschaft)

Sei M eine bereits definierte Menge und $P(x)$ eine Aussageform (mit x aus M). Dann beschreibt

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Teilmenge von M , die alle Elemente x enthält, die $P(x)$ erfüllen.

Dabei steht „ $\mid$ “ für „mit der Eigenschaft“

Beispiele:

- Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{ungerade}(x)\}$
(wenn $\text{ungerade}(x)$ entsprechende Aussageform ist)
- Natürliche Zahlen als Teilmenge der ganzen Zahlen: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
- Primzahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x \text{ ist nur durch } 1 \text{ und sich selbst teilbar}\}$

Weitere Schreibweisen

Erweiterung der Mengenbeschreibung durch Eigenschaft:

$$\{h(x) \mid x \in X, P(x)\}$$

wobei

- h ist eine Funktion, die auf x angewendet wird
- $P(x)$ ist eine Aussageform (mit x aus X)
- zu beachten ist, dass $x \in X$ hinter $\mid$ steht.

Beispiele:

- Menge aller Quadratzahlen größer als 999:

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 > 999\}$$

- Die Menge aller Kubikzahlen (mit leerer Aussageform = immer wahr)

$$\{x^3 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Quiz 3

Welches der folgenden Konstrukte ist eine Mengenbeschreibung durch Eigenschaft?

- A) $\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x > 4\}$
- B) $\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x > 1 \mid x < 3\}$
- C) $\{x + 1 \mid x \in \{1, 2, 3\}, x > 0\}$
- D) $\{x + 1 \mid x \in \{1, 2, 3\} \mid x > 0\}$
- E) $\{x \in \{1, 2, 3\}, x > 4\}$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 4

Stelle die Menge

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt die Zahl } 24\}$$

durch Aufzählen der Elemente dar. Zähle die Elemente dabei in aufsteigender Reihenfolge auf.

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Schreibweise für Intervalle

Definition (Intervalle)

Für $a < b \in \mathbb{R}$ definieren wir Schreibweisen für Intervalle:

Geschlossenes Intervall:	$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Offenes Intervall:	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Linksseitig halboffenes Intervall:	$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Rechtsseitig halboffenes Intervall:	$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

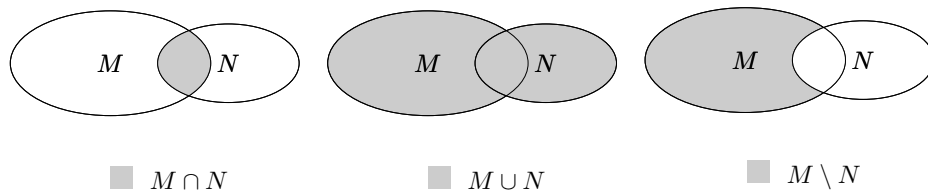
Manchmal eckige Klammern „falsch herum“ statt runder Klammern:

$$]a, b[,]a, b] \text{ und } [a, b[$$

- $x \in \{x \in M \mid P(x)\}$ kann man auch direkt $x \in M \wedge P(x)$ schreiben.
Wenn M klar ist, kann man auch nur $P(x)$ schreiben.
- statt $\{x \in M \mid P(x)\}$ schreiben wir auch $\{x \mid x \in M \wedge P(x)\}$ oder
– wenn M klar ist – $\{x \mid P(x)\}$

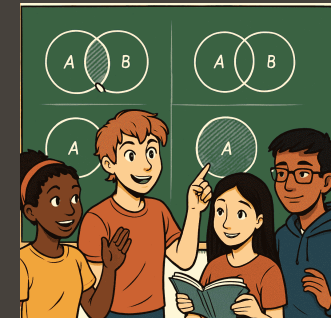
Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz)

- 1 **Schnitt:** $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$
- 2 **Vereinigung:** $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$
- 3 **Differenzmenge** (M ohne N): $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$



OPERATIONEN AUF MENGEN

- Schnitt
- Vereinigung
- Differenz
- Komplement



- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$

Mit M = Alle Informatikstudierenden, N = Alle Erstsemester

- $M \cap N$ = Alle Informatikstudierenden im ersten Semester
- $M \cup N$ = Alle Studierende, die im ersten Semester sind oder Informatik studieren (oder beides)
- $M \setminus N$ = Alle Informatik-Studierende, die nicht im ersten Semester studieren

Mit C = Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen und D = Menge aller geraden Zahlen

- $C \cap D$ = Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen.
- $C \cup D$ = Menge aller durch 2 oder 3 teilbaren Zahlen
- $C \setminus D$ = Menge aller Zahlen, die durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

Aufgabe

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

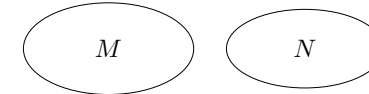
Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C = \{4, 8, 16, 20\}$
- $A \setminus (B \cap C) = \{4, 8, 12, 16, 20\} \setminus \{6, 18\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Disjunkte Mengen

Definition

Mengen M und N sind **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben, d.h. $M \cap N = \emptyset$.



Beispiele:

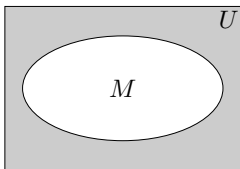
- $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind disjunkt
- Die Menge aller roten Socken und die Menge aller grünen Hemden sind disjunkt
- $\{x \in U \mid P(x)\}$ und $\{x \in U \mid \neg P(x)\}$ sind für jede Menge U und Aussageform $P(x)$ disjunkt

Komplement

Definition

Sei U ein Universum und $M \subseteq U$ eine Teilmenge.

Das **Komplement** $\overline{M}$ von M ist definiert als: $\overline{M} := U \setminus M$.



■ $\overline{M}$

Beispiele:

- Für $U =$ alle Menschen und $E =$ Volljährige
 $\overline{E} =$ Kinder und Jugendliche
- Für $U = \mathbb{N}$ und $G =$ alle geraden natürlichen Zahlen
 $\overline{G} =$ alle ungerade natürlichen Zahlen

Manchmal: M^c statt $\overline{M}$.

MENGEN UND LOGIK

- Korrespondenz Logik und Mengen
- Satz von de Morgan
- Rechengesetze



Mengenoperationen werden letztlich auf Logikoperationen zurückgeführt, denn:

Für ein Universum U und Teilmengen M, N davon gilt:

- Schnitt: $M \cap N := \{x \in U \mid x \in M \wedge x \in N\}$
- Vereinigung: $M \cup N := \{x \in U \mid x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x \in U \mid x \in M \wedge \neg(x \in N)\}$
- Komplement: $\overline{M} := \{x \in U \mid \neg(x \in M)\}$

Da $\cap, \cup, \neg$ auf die logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ zurückgeführt werden können, übertragen sich die Gesetze der Logik ebenfalls auf die Mengenoperationen!

Satz von De Morgan

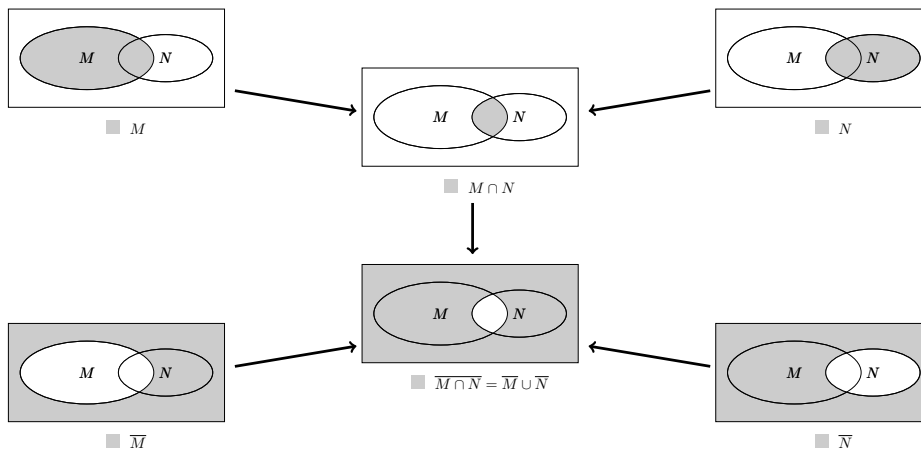
Seien M und N Teilmengen einer Menge U . Dann gilt:

1. $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
2. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

Beweis. Wir zeigen den ersten Teil:

$$\begin{aligned}
 & \overline{M \cap N} \\
 = & \{x \in U \mid \neg(x \in (M \cap N))\} && \text{(Einsetzen } \neg) \\
 = & \{x \in U \mid \neg(x \in \{x \in U \mid x \in M \wedge x \in N\})\} && \text{(Einsetzen } \cap) \\
 = & \{x \in U \mid \neg(x \in M \wedge x \in N)\} && \text{(Vereinfachung)} \\
 = & \{x \in U \mid \neg(x \in M) \vee \neg(x \in N)\} && \text{(logischer De Morgan)} \\
 = & \{x \in U \mid x \in \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \vee x \in \{x \in U \mid \neg(x \in N)\}\} && \text{(Vereinfachung)} \\
 = & \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \cup \{x \in U \mid \neg(x \in N)\} && \text{(Einsetzen } \cup) \\
 = & \overline{M} \cup \overline{N} && \text{(Einsetzen } \neg) \quad \square
 \end{aligned}$$

1. De Morgansches Gesetz: Venn-Diagramme



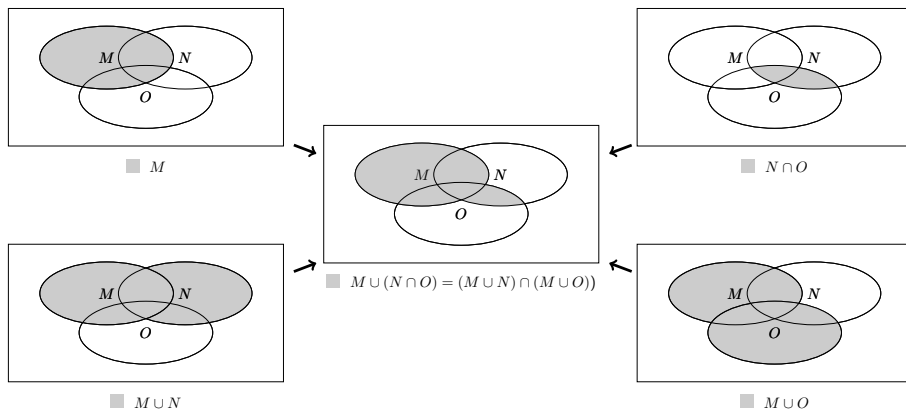
Rechengesetze für Mengen

Rechengesetze für Mengen

Für alle Teilmengen M, N, O der Grundmenge U gelten die folgenden Gesetze:

1. Kommutativgesetz: $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$
2. Assoziativgesetz: $((M \cap N) \cap O) = (M \cap (N \cap O))$ und $((M \cup N) \cup O) = (M \cup (N \cup O))$
3. Distributivgesetz: $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ und $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$
4. Existenz neutraler Elemente: $M \cap U = M$ und $M \cup \emptyset = M$
5. Existenz des Komplements: $M \cap \overline{M} = \emptyset$ und $M \cup \overline{M} = U$

1. Distributivgesetz: Venn-Diagramme



Weitere Gesetze

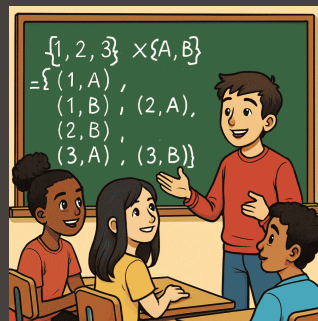
Satz

Seien M, N Teilmengen von U . Dann gilt:

- ➊ Absorptionsgesetz: $M \cap (M \cup N) = M$ und $M \cup (M \cap N) = M$
- ➋ Idempotenzgesetz: $M \cup M = M$ und $M \cap M = M$
- ➌ Involutionsgesetz (doppeltes Komplement): $\overline{\overline{M}} = M$
- ➍ Extremalgesetz: $M \cup U = U$ und $M \cap \emptyset = \emptyset$

KARTESISCHES PRODUKT

- Paare und Tupel
- Binäres kartesisches Produkt
- Allgemeines kartesisches Produkt



Paare und Tupel

Definition

Seien $M_1, \dots, M_n$ Mengen und $x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$. Dann nennt man $(x_1, \dots, x_n)$ ein **n -Tupel** (oder kurz, ein **Tupel**).

Für $n = 2$ spricht man auch von einem (geordneten) **Paar**.

3-Tupel werden auch als **Tripel** bezeichnet.

- Die Reihenfolge der Elemente **ist relevant**: $(1, \text{Grün}, 3) \neq (1, 3, \text{Grün})$.
- Mehrfaches Auftreten gleicher Elemente ist **erlaubt** und **verschieden**: $(1, 2, 3) \neq (1, 1, 2, 2, 3)$!

Kartesisches Produkt

Definition

Für Mengen M und N ist das **kartesische Produkt** $M \times N$ (auch **Kreuzprodukt**):

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

Wenn M oder N leere Menge, ist das Kreuzprodukt leer (d.h. $M \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times M$).

Beachte: Das erweitert erneut die Schreibweise für Mengen mit Eigenschaft

Beispiele:

- Für $M = \{1\}$ und $N = \{4\}$ ist $M \times N = \{(1, 4)\}$ und $N \times M = \{(4, 1)\}$.
- Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$ ist

$$M \times N = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \text{ und} \\ N \times M = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)\}$$

Weitere Beispiele

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts
- Für $M = \{1, 2\}$, $N = \{A, B, C\}$, $O = \{\text{Rot, Grün}\}$ ist

$$(M \times N) \times O = \{((1, A), \text{Rot}), ((1, B), \text{Rot}), ((1, C), \text{Rot}), \\ ((2, A), \text{Rot}), ((2, B), \text{Rot}), ((2, C), \text{Rot}), \\ ((1, A), \text{Grün}), ((1, B), \text{Grün}), ((1, C), \text{Grün}), \\ ((2, A), \text{Grün}), ((2, B), \text{Grün}), ((2, C), \text{Grün})\} \text{ und}$$

$$M \times (N \times O) = \{(1, (A, \text{Rot})), (1, (A, \text{Grün})), (1, (B, \text{Rot})), \\ (1, (B, \text{Grün})), (1, (C, \text{Rot})), (1, (C, \text{Grün})), \\ (2, (A, \text{Rot})), (2, (A, \text{Grün})), (2, (B, \text{Rot})), \\ (2, (B, \text{Grün})), (2, (C, \text{Rot})), (2, (C, \text{Grün}))\}$$

- Das Kreuzprodukt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist eine Repräsentation der rationalen Zahlen.

Quiz 5

Was ergibt $M \times N$ für $M = \{1, 2, 3, 5\}$ und $N = \{8, 13\}$?

- A) $\{(8, 1), (13, 1), (8, 2), (13, 2), (8, 3), (13, 3), (8, 5), (13, 5)\}$
- B) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 13)\}$
- C) $\{(1, 8), (1, 13), (2, 8), (2, 13), (3, 8), (3, 13), (5, 8), (5, 13)\}$
- D) $\{(8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 5), (13, 1), (13, 2), (13, 3), (13, 5)\}$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



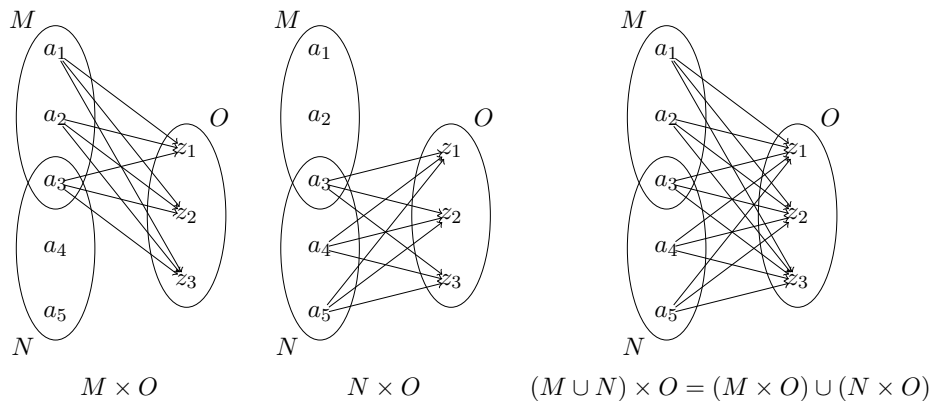
Eigenschaften des kartesischen Produkts

Das kartesische Produkt ist **nicht** kommutativ und **nicht** assoziativ.

Satz

- Distributivgesetze für $\cup$ und $\times$:
 $(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$ und $M \times (N \cup O) = (M \times N) \cup (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\cap$ und $\times$:
 $(M \cap N) \times O = (M \times O) \cap (N \times O)$ und $M \times (N \cap O) = (M \times N) \cap (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\setminus$ und $\times$:
 $(M \setminus N) \times O = (M \times O) \setminus (N \times O)$ und $M \times (N \setminus O) = (M \times N) \setminus (M \times O)$

Veranschaulichung 1. Distributivgesetz



Allgemeines kartesisches Produkt

Definition

Für Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times \dots \times M_n$ definiert als

$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}$$

Ist eine der Mengen M_i leer, so gilt $M_1 \times \dots \times M_n = \emptyset$.

Notation für das n -fache kartesische Produkt von M mit sich selbst: M^n

Z.B. schreiben wir $\mathbb{R}^3$ für $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Beispiele

- Für $M = \{0, 1\}$ ist

$$M^3 = M \times M \times M = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

- Für $M = \{a, b\}, N = \{C, D\}, O = \{1, 2\}$ ist

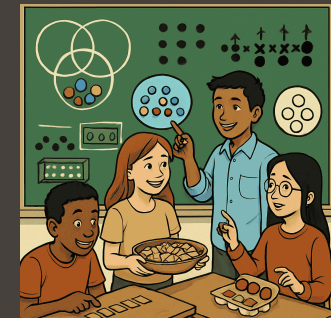
$$M \times N \times O = \{(a, C, 1), (a, C, 2), (a, D, 1), (a, D, 2), (b, C, 1), (b, C, 2), (b, D, 1), (b, D, 2)\}$$

$$O \times M \times N = \{(1, a, C), (1, a, D), (1, b, C), (1, b, D), (2, a, C), (2, a, D), (2, b, C), (2, b, D)\}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt die Menge aller dreidimensionalen Punkte im Raum
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ beschreibt ? alle dreidimensionalen Punkte eines Würfels mit Seitenlänge 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt

MÄCHTIGKEITEN UND ZÄHLFORMELN

- Mächtigkeit
- Summenformel
- Siebformel
- Produktformel
- Potenzmenge
- Binomialkoeffizienten



Mächtigkeit

Definition

Für eine Menge M , bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M .

$|M|$ heißt die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) von M .

Wenn $|M| \in \mathbb{N}_0$, dann ist M **endlich**, ansonsten ist M **unendlich** (Notation $|M| = \infty$)

Beispiele:

- $|\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}| = 6$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset, 1, \{2, 3, 4, 5\}\}| = 3$ (denn die Menge hat die 3 Elemente $\emptyset$, 1 und $\{2, 3, 4, 5\}$).
- $|\mathbb{N}| = \infty, |\mathbb{R}| = \infty$
- $|\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}| = 0, |\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}| = \infty$

Quiz 6

Was ist die Mächtigkeit von

$$\{A, C, F, G, H\}?$$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 7

Was ist die Mächtigkeit von

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge 1 \leq x \leq 20\}?$$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Aufgabe

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Z.B. $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Einfache Rechenregeln zur Mächtigkeit



Satz

Seien M, N endliche Mengen mit $M \subseteq N$. Dann gilt $|N \setminus M| = |N| - |M|$.

Satz (Mächtigkeit des Komplements)

Sei U ein endliches Universum und M eine Teilmenge von U . Dann gilt $|\overline{M}| = |U \setminus M| = |U| - |M|$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} |\text{Volljährige}| &= |\text{Kinder und Jugendliche}| \\ &= |\text{Menschen} \setminus \text{Kinder und Jugendliche}| \\ &= |\text{Menschen}| - |\text{Kinder und Jugendliche}| \end{aligned}$$

Summenformel



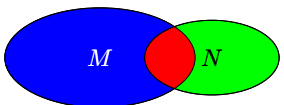
Satz (Summenformel)

Seien M und N endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

Beweis:

- $M \cup N$ besteht aus drei disjunkten Mengen:
 $M \setminus N$ und $N \setminus M$ und $M \cap N$



- Daher gilt

$$\begin{aligned} |M \cup N| &= |M \setminus N| + |N \setminus M| + |M \cap N| \\ &= |M \setminus (M \cap N)| + |N \setminus (M \cap N)| + |M \cap N| \\ &= |M| - |M \cap N| + |N| - |M \cap N| + |M \cap N| \\ &= |M| + |N| - |M \cap N|. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3\} \text{ und } N = \{2, 3, 4\} \\ |M \cup N| &= |M| + |N| - |M \cap N| \\ &= 3 + 3 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Aufgabe



Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

→ Aus der Aufgabenstellung $|I| = 20, |D| = 10, |I \cap D| = 5$

→ Mit der Summenformel $|I \cup D| = |I| + |D| - |I \cap D| = 20 + 10 - 5 = 25$

Summenformel bei 3 Mengen



Die Summenformel für drei endliche Mengen M, N und O lautet:

$$|M \cup N \cup O| = |M| + |N| + |O| - |M \cap N| - |M \cap O| - |N \cap O| + |M \cap N \cap O|$$

Elemente, die in genau	Beitrag zu		
	$ M + N + O $	$- M \cap N - M \cap O - N \cap O $	$ M \cap N \cap O $
einer Menge sind	1	0	0
zwei Mengen sind	2	-1	0
drei Mengen sind	3	-3	1

Jedes Element wird daher in der Formel genau einmal gezählt.

Satz (Siebformel)

Seien $M_1, \dots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \cup \dots \cup M_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \dots$$

wobei α_i die Summe aller Mächtigkeiten aller Schnitte von i Mengen ist, d.h. α_i berechnet sich durch die folgenden Schritte:

- Für je i Mengen der Mengen $M_1, \dots, M_n$ bilde deren Schnitt.
- Bestimme die Mächtigkeiten der Schnittmengen.
- Summiere die Mächtigkeiten der Schnittmengen.

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

$$\begin{aligned} & |M_1 \cup \dots \cup M_4| \\ = & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ = & |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| \\ & - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_4| + |M_3 \cap M_4|) \\ & + (|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4|) \\ & - |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4| \end{aligned}$$

Satz

Seien M und N endliche Mengen, dann gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

Für k endliche Mengen $M_1, \dots, M_k$ gilt $|M_1 \times \dots \times M_k| = |M_1| \cdot \dots \cdot |M_k|$.

Beweis.

- Sei $|M| = m$ und $|N| = n$.
- Für jedes Paar $(x, y) \in M \times N$ hat man m Möglichkeiten für x .
- Ist x festgelegt, so hat man n weitere Möglichkeiten um y festzulegen.
- Also gibt es $m \cdot n$ Möglichkeiten. □

- Für vierstellige PINs am Geldautomat gibt es

$$|\{0, \dots, 9\}^4| = 10^4 = 10000$$

Möglichkeiten.

- Ein Schachbrett hat

$$|\{A, \dots, H\} \times \{1, \dots, 8\}| = |\{A, \dots, H\}| \cdot |\{1, \dots, 8\}| = 8 \cdot 8 = 64$$

Felder.

Quiz 8

Wie viele Karten hat ein Skatblatt, welches durch

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$$

repräsentiert wird?

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Anwendung: Produktformel

Binäre Tupel sind Tupel, die nur aus 0en und 1en bestehen.

D.h. ein binäres n -Tupel ist von der Form $(b_1, \dots, b_n)$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Beispiel:

- Die Menge aller binären 3-Tupel ist $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.
- Das sind 8 Stück. Wie sieht es allgemein aus?

Satz

Die Anzahl der binären n -Tupel ist 2^n .

Beweis. Verwende die Produktformel für das n -fache Kreuzprodukt von $\{0, 1\}$:

$$|\underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n \text{ Mal}}| = |\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$$

Potenzmenge

Definition

Sei M eine Menge.

Die Menge aller Teilmengen von M nennt man **Potenzmenge** von M .

Wir schreiben $\mathcal{P}(M)$ für die Potenzmenge.

$$\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$$

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Mächtigkeit der Potenzmenge

Satz

Jede n -elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen, d.h.

für endliche Mengen M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

- Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine beliebige Nummerierung der n Elemente von M .
- Für jede Teilmenge N von M erzeuge ein binäres n -Tupel $B_N = (b_{N,1}, \dots, b_{N,n})$ wobei $b_{N,i} = 0$, wenn $x_i \notin N$ und $b_{N,i} = 1$ wenn $x_i \in N$.
- Für jedes n -Tupel gibt es genau eine Teilmenge
- Anzahl der n -Tupel ist 2^n . □

Sei $M = \{a, b, c\}$, wobei die Elemente in der Reihenfolge a, b, c nummeriert sind. Welche binären 3-Tupel stellen die Teilmengen $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ entsprechend dem letzten Beweis jeweils dar?

$\emptyset$	$(0, 0, 0)$
$\{b, c\}$	$(0, 1, 1)$
$\{a, c\}$	$(1, 0, 1)$
$\{a, b, c\}$	$(1, 1, 1)$

$\binom{n}{0} = 1$ für jedes n , da es genau eine nullelementige Teilmenge gibt – die leere Menge

$\binom{n}{n} = 1$ für jedes n , da es genau eine n -elementige Teilmenge gibt – die gesamte Menge

$\binom{0}{0} = 1$ da die leere Menge sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{0}{n} = 0$ für jedes $n > 0$, da die leere Menge nur sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{n}{1} = n$ für jedes n , da es für jedes Element eine einelementige Menge gibt, und diese eine Teilmenge ist (gilt auch für $n = 0$!)

Definition

Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge wird mit

$$\binom{n}{k} \quad (\text{ gesprochen „}n \text{ über } k\text{“})$$

bezeichnet. Diese Zahlen heißen **Binomialkoeffizienten**.

Beispiel:

$\{1, 2, 3, 4\}$ hat $\binom{4}{2} = 6$ zweielementige Teilmengen: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$ und $\{3, 4\}$

Satz

Sei $1 \leq k \leq n$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis.

- Sei M eine n -elementige Menge und $m \in M$.
- Sei $M_k = \{M' \subseteq M \mid |M'| = k\}$ = alle k -elementigen Teilmengen von M , d.h. $\binom{n}{k} = |M_k|$
- Teile die Mengen in M_k in zwei **disjunkte** Mengen auf:
 $A = \{M' \in M_k \mid m \notin M'\}$ $B = \{M' \in M_k \mid m \in M'\}$
- $|A|$ = Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k}$
- $|B|$ = Anzahl der $k-1$ -elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k-1}$ □

Fakultät von natürlichen Zahlen

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Wir definieren zusätzlich $0! := 1$.

Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bei Lotto „6 aus 49“ werden 6 Zahlen aus 49 gegebenen Zahlen gezogen.

$$\text{Möglichkeiten: } \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816$$

Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige: $1/13.983.816 = 0,000000071 \dots$