

Diskrete Strukturen

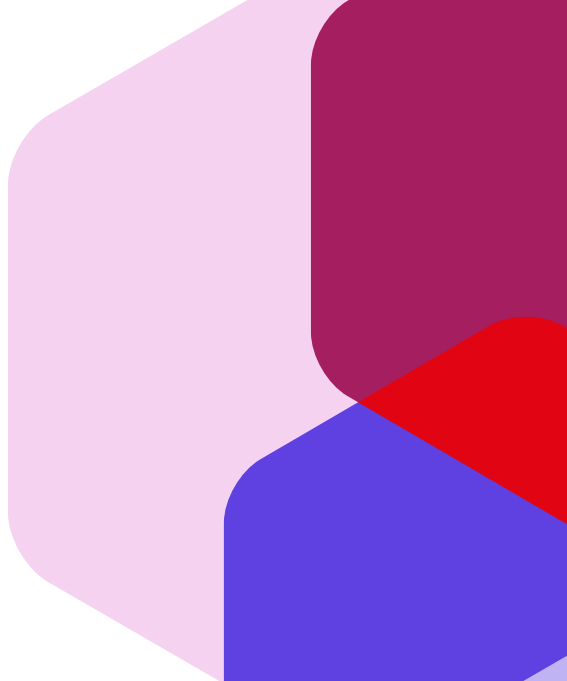
für die Studiengänge

Angewandte Informatik & Technische Informatik

03 Mengen

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2025/26

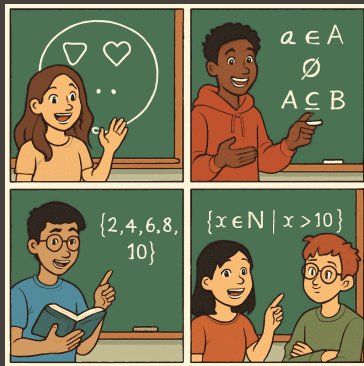
Stand der Folien: 2. Dezember 2025



- ① Mengen beschreiben
- ② Operationen auf Mengen
- ③ Mengen und Logik
- ④ Kartesisches Produkt
- ⑤ Mächtigkeiten und Zählformeln

MENGEN BESCHREIBEN

- Was sind Mengen?
- Grundlegende Notationen
- Mengen beschreiben durch Aufzählen
- Mengen beschreiben durch Eigenschaften



Georg Cantors Definition

„Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Baut man darauf auf, so kann dies zu **Widersprüchen** führen!

Russelsche Antinomie

- Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$
- R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
- Aber weder $R \in R$ noch $R \notin R$ kann gelten (Widerspruch!).

Georg Cantors Definition

„Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Baut man darauf auf, so kann dies zu **Widersprüchen** führen!

Russelsche Antinomie

- Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$
- R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
- Aber weder $R \in R$ noch $R \notin R$ kann gelten (Widerspruch!).

→ Definition von Mengen ist schwierig (axiomatische Mengenlehre)

Wir machen keine Mengendefinition, sondern beschreiben Mengen durch Aufzählen / durch Eigenschaften

- Die Objekte einer Menge nennt man **Elemente**.
- Eine Menge können wir aufschreiben, indem wir die Elemente aufzählen.

Definition (Notation für Mengen)

- Elemente einer Menge werden mit Kommas getrennt und durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umschlossen.
- Wenn Objekt m in Menge M enthalten ist, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
- Die **leere Menge** $\emptyset$ oder $\{\}$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält.

- Die Objekte einer Menge nennt man **Elemente**.
- Eine Menge können wir aufschreiben, indem wir die Elemente aufzählen.

Definition (Notation für Mengen)

- Elemente einer Menge werden mit Kommas getrennt und durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umschlossen.
- Wenn Objekt m in Menge M enthalten ist, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
- Die **leere Menge** $\emptyset$ oder $\{\}$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$ die Menge der Zahlen 1, 2 und 3
- $\{\text{Schwarz}, \text{Weiß}\}$ ist die Menge der Farben Schwarz und Weiß
- $4 \in \{2, 4, 6, 9\}$ und $5 \notin \{2, 4, 6, 9\}$
- $4 \notin \emptyset$ und $\text{Weiß} \notin \{\}$

Definition

- Menge M ist eine **Teilmenge** von N ($M \subseteq N$) wenn $\forall x \in M : x \in N$ gilt.
- Menge M ist eine **echte Teilmenge** von N , ($M \subset N$) wenn $M \subseteq N \wedge \exists y \in N : y \notin M$.
- Mengen M und N sind **gleich** ($M = N$), wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

- Die Reihenfolge der Elemente spielt in einer Menge keine Rolle.
- Ebenso werden Elemente in einer Menge nicht mehrfach betrachtet.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

Quiz 1



Hochschule RheinMain

Welche der folgenden Mengen sind gleich zur Menge $\{1, 2, 3\}$?

- A) $\{3, 2, 1\}$
- B) $\{1, 2, 1, 2, 3\}$
- C) $\{1, 2, 3, 3\}$
- D) $\{11, 22, 33\}$
- E) $\{\{1, 2, 3\}\}$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 2



Hochschule RheinMain

Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3\}$ und $C = \{3, 2\}$.

Was stimmt?

- A) $A \subseteq B$
- B) $B \subset C$
- C) $C \subseteq A$
- D) $B \subseteq C$
- E) $B \subset C$

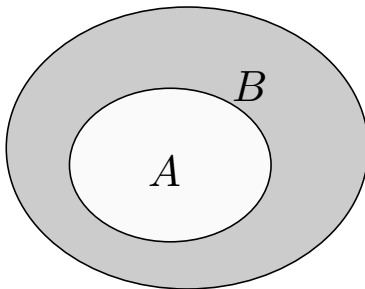
arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Graphische Darstellung von Mengen und deren Beziehungen (benannt nach John Venn)

Gilt $A \subset B$ so zeichnet man:



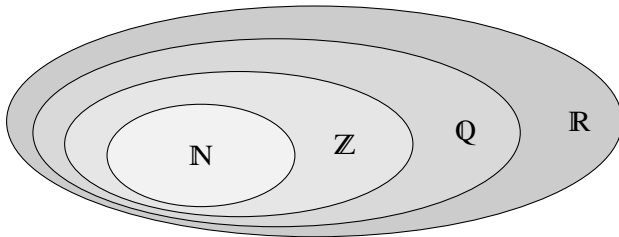
Definition (Zahlenmengen)

Wir definieren Symbole für bekannte Zahlenmengen:

- Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der natürlichen Zahlen und 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} :=$ alle gekürzten Brüche, bzw. endliche oder periodische Dezimalzahlen.
- Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R} :=$ alle Dezimalzahlen.

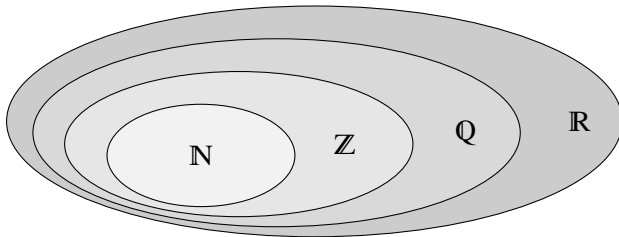
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

- $? \in \mathbb{Z}$ aber $? \notin \mathbb{N}$
- $? \in \mathbb{Q}$ aber $? \notin \mathbb{Z}$
- $? \in \mathbb{R}$ aber $? \notin \mathbb{Q}$



Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

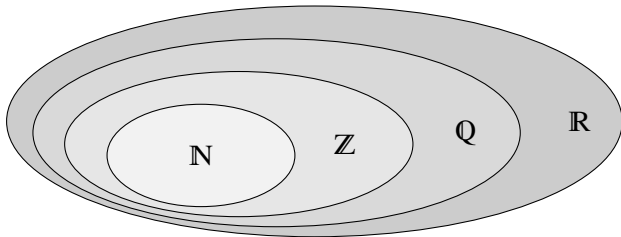
- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $? \in \mathbb{Q}$ aber $? \notin \mathbb{Z}$
- $? \in \mathbb{R}$ aber $? \notin \mathbb{Q}$



Zahlenmengen (2)

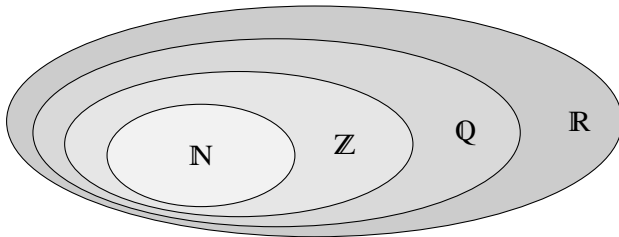
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Definition (Mengenbeschreibung durch Eigenschaft)

Sei M eine bereits definierte Menge und $P(x)$ eine Aussageform (mit x aus M).
Dann beschreibt

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Teilmenge von M , die **alle Elemente x** enthält, **die $P(x)$ erfüllen**.

Dabei steht „ $\mid$ “ für „mit der Eigenschaft“

Definition (Mengenbeschreibung durch Eigenschaft)

Sei M eine bereits definierte Menge und $P(x)$ eine Aussageform (mit x aus M).
Dann beschreibt

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Teilmenge von M , die **alle Elemente x** enthält, **die $P(x)$ erfüllen**.

Dabei steht „ $\mid$ “ für „mit der Eigenschaft“

Beispiele:

- Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{ungerade}(x)\}$
(wenn $\text{ungerade}(x)$ entsprechende Aussageform ist)
- Natürliche Zahlen als Teilmenge der ganzen Zahlen: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
- Primzahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x \text{ ist nur durch } 1 \text{ und sich selbst teilbar}\}$

Weitere Schreibweisen

Erweiterung der Mengenbeschreibung durch Eigenschaft:

$$\{h(x) \mid x \in X, P(x)\}$$

wobei

- h ist eine Funktion, die auf x angewendet wird
- $P(x)$ ist eine Aussageform (mit x aus X)
- zu beachten ist, dass $x \in X$ hinter $\mid$ steht.

Beispiele:

- Menge aller Quadratzahlen größer als 999:

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 > 999\}$$

- Die Menge aller Kubikzahlen (mit leerer Aussageform = immer wahr)

$$\{x^3 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Quiz 3



Hochschule RheinMain

Welches der folgenden Konstrukte ist eine Mengenbeschreibung durch Eigenschaft?

- A) $\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x > 4\}$
- B) $\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x > 1 \mid x < 3\}$
- C) $\{x + 1 \mid x \in \{1, 2, 3\}, x > 0\}$
- D) $\{x + 1 \mid x \in \{1, 2, 3\} \mid x > 0\}$
- E) $\{x \in \{1, 2, 3\}, x > 4\}$

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 4



Hochschule RheinMain

Stelle die Menge

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt die Zahl } 24\}$$

durch Aufzählen der Elemente dar. Zähle die Elemente dabei in aufsteigender Reihenfolge auf.

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Definition (Intervalle)

Für $a < b \in \mathbb{R}$ definieren wir Schreibweisen für Intervalle:

Geschlossenes Intervall:	$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Offenes Intervall:	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Linksseitig halboffenes Intervall:	$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Rechtsseitig halboffenes Intervall:	$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Manchmal eckige Klammern „falsch herum“ statt runder Klammern:

$]a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b[$

- $x \in \{x \in M \mid P(x)\}$ kann man auch direkt $x \in M \wedge P(x)$ schreiben.
Wenn M klar ist, kann man auch nur $P(x)$ schreiben.
- statt $\{x \in M \mid P(x)\}$ schreiben wir auch $\{x \mid x \in M \wedge P(x)\}$ oder
– wenn M klar ist – $\{x \mid P(x)\}$

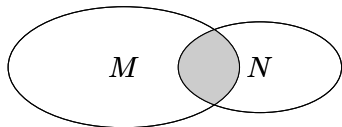
OPERATIONEN AUF MENGEN

- Schnitt
- Vereinigung
- Differenz
- Komplement

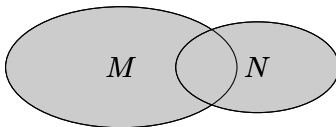


Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz)

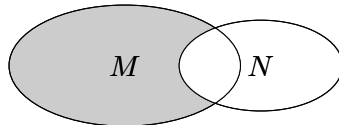
- 1 **Schnitt:** $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$
- 2 **Vereinigung:** $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$
- 3 **Differenzmenge** (M ohne N): $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$



■ $M \cap N$



■ $M \cup N$



■ $M \setminus N$

Beispiele

- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$

Beispiele

- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$

Mit M = Alle Informatikstudierenden, N = Alle Erstsemester

- $M \cap N$ = Alle Informatikstudierenden im ersten Semester
- $M \cup N$ = Alle Studierende, die im ersten Semester sind
oder Informatik studieren (oder beides)
- $M \setminus N$ = Alle Informatik-Studierende, die nicht im ersten Semester studieren

- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$

Mit M = Alle Informatikstudierenden, N = Alle Erstsemester

- $M \cap N$ = Alle Informatikstudierenden im ersten Semester
- $M \cup N$ = Alle Studierende, die im ersten Semester sind oder Informatik studieren (oder beides)
- $M \setminus N$ = Alle Informatik-Studierende, die nicht im ersten Semester studieren

Mit C = Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen und D = Menge aller geraden Zahlen

- $C \cap D$ = Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen.
- $C \cup D$ = Menge aller durch 2 oder 3 teilbaren Zahlen
- $C \setminus D$ = Menge aller Zahlen, die durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B$
- $A \cap C$
- $B \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C$
- $B \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C = \{4, 8, 16, 20\}$
- $A \setminus (B \cap C)$

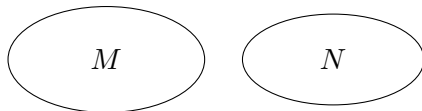
Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.

Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C = \{4, 8, 16, 20\}$
- $A \setminus (B \cap C) = \{4, 8, 12, 16, 20\} \setminus \{6, 18\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Definition

Mengen M und N sind **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben, d.h. $M \cap N = \emptyset$.



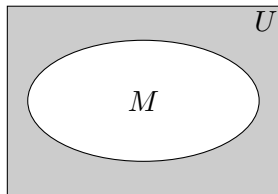
Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind disjunkt
- Die Menge aller roten Socken und die Menge aller grünen Hemden sind disjunkt
- $\{x \in U \mid P(x)\}$ und $\{x \in U \mid \neg P(x)\}$ sind für jede Menge U und Aussageform $P(x)$ disjunkt

Definition

Sei U ein Universum und $M \subseteq U$ eine Teilmenge.

Das **Komplement** $\overline{M}$ von M ist definiert als: $\overline{M} := U \setminus M$.



■ $\overline{M}$

Beispiele:

- Für $U =$ alle Menschen und $E =$ Volljährige
 $\overline{E} =$ Kinder und Jugendliche
- Für $U = \mathbb{N}$ und $G =$ alle geraden natürlichen Zahlen
 $\overline{G} =$ alle ungerade natürlichen Zahlen

Manchmal: M^c statt $\overline{M}$.

MENGEN UND LOGIK

- Korrespondenz Logik und Mengen
- Satz von de Morgan
- Rechengesetze



Mengenoperationen werden letztlich auf Logikoperationen zurückgeführt, denn:

Für ein Universum U und Teilmengen M, N davon gilt:

- Schnitt: $M \cap N := \{x \in U \mid x \in M \wedge x \in N\}$
- Vereinigung: $M \cup N := \{x \in U \mid x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x \in U \mid x \in M \wedge \neg(x \in N)\}$
- Komplement: $\overline{M} := \{x \in U \mid \neg(x \in M)\}$

Da $\cap, \cup, \overline{}$ auf die logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ zurückgeführt werden können, **übertragen** sich die Gesetze der Logik ebenfalls auf die Mengenoperationen!

Satz von De Morgan

Seien M und N Teilmengen einer Menge U . Dann gilt:

$$① \quad \overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

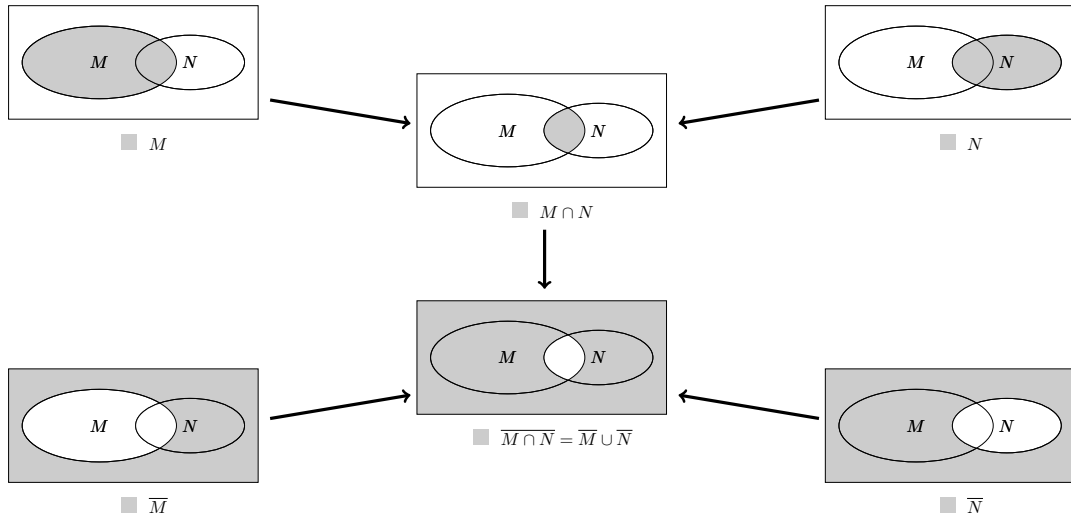
$$② \quad \overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$$

Beweis. Wir zeigen den ersten Teil:

$$\begin{aligned} & \overline{M \cap N} \\ &= \{x \in U \mid \neg(x \in (M \cap N))\} && \text{(Einsetzen } \neg) \\ &= \{x \in U \mid \neg(x \in \{x \in U \mid x \in M \wedge x \in N\})\} && \text{(Einsetzen } \cap) \\ &= \{x \in U \mid \neg(x \in M \wedge x \in N)\} && \text{(Vereinfachung)} \\ &= \{x \in U \mid \neg(x \in M) \vee \neg(x \in N)\} && \text{(logischer De Morgan)} \\ &= \{x \in U \mid x \in \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \vee x \in \{x \in U \mid \neg(x \in N)\}\} && \text{(Vereinfachung)} \\ &= \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \cup \{x \in U \mid \neg(x \in N)\} && \text{(Einsetzen } \cup) \\ &= \overline{M} \cup \overline{N} && \text{(Einsetzen } \neg) \end{aligned}$$



1. De Morgansches Gesetz: Venn-Diagramme

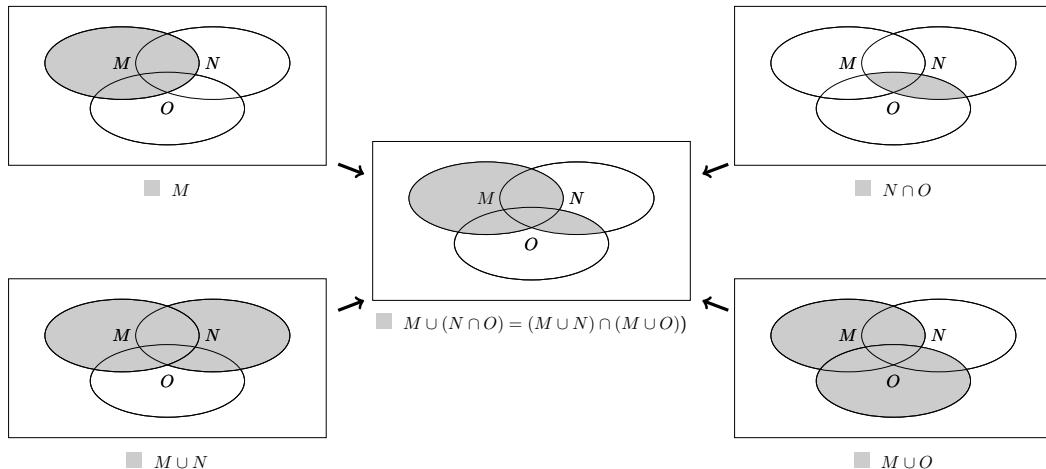


Rechengesetze für Mengen

Für alle Teilmengen M, N, O der Grundmenge U gelten die folgenden Gesetze:

- ① Kommutativgesetze: $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$
- ② Assoziativgesetze: $((M \cap N) \cap O) = (M \cap (N \cap O))$ und
 $((M \cup N) \cup O) = (M \cup (N \cup O))$
- ③ Distributivgesetze: $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ und
 $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$
- ④ Existenz neutraler Elemente: $M \cap U = M$ und $M \cup \emptyset = M$
- ⑤ Existenz des Komplements: $M \cap \overline{M} = \emptyset$ und $M \cup \overline{M} = U$

1. Distributivgesetz: Venn-Diagramme



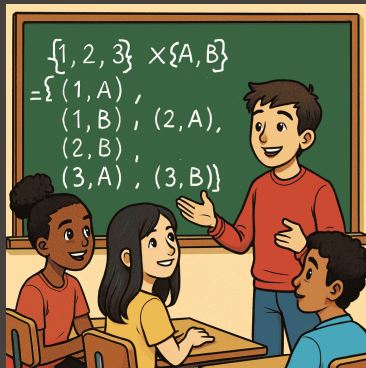
Satz

Seien M, N Teilmengen von U . Dann gilt:

- ➊ Absorptionsgesetze: $M \cap (M \cup N) = M$ und $M \cup (M \cap N) = M$
- ➋ Idempotenzgesetze: $M \cup M = M$ und $M \cap M = M$
- ➌ Involutionsgesetz (doppeltes Komplement): $\overline{\overline{M}} = M$
- ➍ Extremalgesetze: $M \cup U = U$ und $M \cap \emptyset = \emptyset$

KARTESISCHES PRODUKT

- Paare und Tupel
- Binäres kartesisches Produkt
- Allgemeines kartesisches Produkt



Definition

Seien $M_1, \dots, M_n$ Mengen und $x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$. Dann nennt man $(x_1, \dots, x_n)$ ein **n -Tupel** (oder kurz, ein **Tupel**).

Für $n = 2$ spricht man auch von einem (geordneten) **Paar**.

3-Tupel werden auch als **Tripel** bezeichnet.

- Die Reihenfolge der Elemente **ist relevant**: $(1, \text{Grün}, 3) \neq (1, 3, \text{Grün})$.
- Mehrfaches Auftreten gleicher Elemente ist **erlaubt** und **verschieden**:
 $(1, 2, 3) \neq (1, 1, 2, 2, 3)$!

Definition

Für Mengen M und N ist das **kartesische Produkt** $M \times N$ (auch **Kreuzprodukt**):

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

Wenn M oder N leere Menge, ist das Kreuzprodukt leer (d.h. $M \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times M$).

Beachte: Das erweitert erneut die Schreibweise für Mengen mit Eigenschaft

Beispiele:

- Für $M = \{1\}$ und $N = \{4\}$ ist $M \times N = \{(1, 4)\}$ und $N \times M = \{(4, 1)\}$.
- Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$ ist

$$M \times N = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \text{ und} \\ N \times M = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)\}$$

Weitere Beispiele

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts

Weitere Beispiele

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts
- Für $M = \{1, 2\}$, $N = \{A, B, C\}$, $O = \{\text{Rot}, \text{Grün}\}$ ist

$$(M \times N) \times O = \{((1, A), \text{Rot}), ((1, B), \text{Rot}), ((1, C), \text{Rot}), \\ ((2, A), \text{Rot}), ((2, B), \text{Rot}), ((2, C), \text{Rot}), \\ ((1, A), \text{Grün}), ((1, B), \text{Grün}), ((1, C), \text{Grün}), \\ ((2, A), \text{Grün}), ((2, B), \text{Grün}), ((2, C), \text{Grün})\} \text{ und}$$

$$M \times (N \times O) = \{(1, (A, \text{Rot})), (1, (A, \text{Grün})), (1, (B, \text{Rot})), \\ (1, (B, \text{Grün})), (1, (C, \text{Rot})), (1, (C, \text{Grün})), \\ (2, (A, \text{Rot})), (2, (A, \text{Grün})), (2, (B, \text{Rot})), \\ (2, (B, \text{Grün})), (2, (C, \text{Rot})), (2, (C, \text{Grün}))\}$$

Weitere Beispiele

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts
- Für $M = \{1, 2\}$, $N = \{A, B, C\}$, $O = \{\text{Rot}, \text{Grün}\}$ ist

$$(M \times N) \times O = \{((1, A), \text{Rot}), ((1, B), \text{Rot}), ((1, C), \text{Rot}), \\ ((2, A), \text{Rot}), ((2, B), \text{Rot}), ((2, C), \text{Rot}), \\ ((1, A), \text{Grün}), ((1, B), \text{Grün}), ((1, C), \text{Grün}), \\ ((2, A), \text{Grün}), ((2, B), \text{Grün}), ((2, C), \text{Grün})\} \text{ und}$$

$$M \times (N \times O) = \{(1, (A, \text{Rot})), (1, (A, \text{Grün})), (1, (B, \text{Rot})), \\ (1, (B, \text{Grün})), (1, (C, \text{Rot})), (1, (C, \text{Grün})), \\ (2, (A, \text{Rot})), (2, (A, \text{Grün})), (2, (B, \text{Rot})), \\ (2, (B, \text{Grün})), (2, (C, \text{Rot})), (2, (C, \text{Grün}))\}$$

- Das Kreuzprodukt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist eine Repräsentation der rationalen Zahlen.

Quiz 5



Hochschule RheinMain

Was ergibt $M \times N$ für $M = \{1, 2, 3, 5\}$ und $N = \{8, 13\}$?

- A) $\{(8, 1), (13, 1), (8, 2), (13, 2), (8, 3), (13, 3), (8, 5), (13, 5)\}$
- B) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 13)\}$
- C) $\{(1, 8), (1, 13), (2, 8), (2, 13), (3, 8), (3, 13), (5, 8), (5, 13)\}$
- D) $\{(8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 5), (13, 1), (13, 2), (13, 3), (13, 5)\}$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558

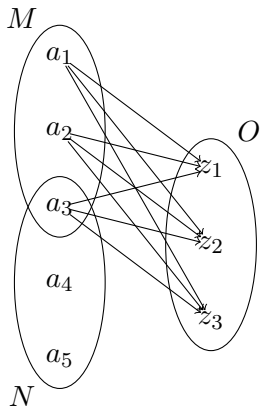


Das kartesische Produkt ist **nicht** kommutativ und **nicht** assoziativ.

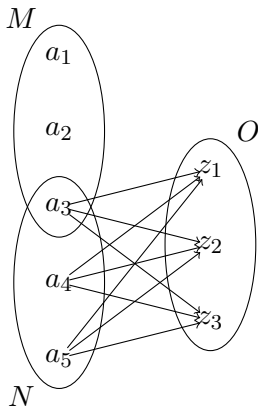
Satz

- Distributivgesetze für $\cup$ und $\times$:
 $(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$ und $M \times (N \cup O) = (M \times N) \cup (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\cap$ und $\times$:
 $(M \cap N) \times O = (M \times O) \cap (N \times O)$ und $M \times (N \cap O) = (M \times N) \cap (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\setminus$ und $\times$:
 $(M \setminus N) \times O = (M \times O) \setminus (N \times O)$ und $M \times (N \setminus O) = (M \times N) \setminus (M \times O)$

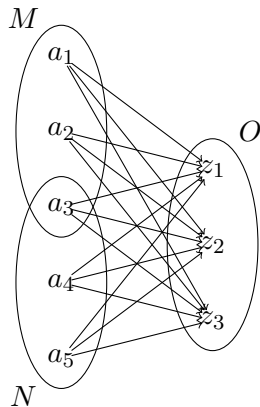
Veranschaulichung 1. Distributivgesetz



$M \times O$



$N \times O$



$$(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$$

Definition

Für Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times \dots \times M_n$ definiert als

$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n\}$$

Ist eine der Mengen M_i leer, so gilt $M_1 \times \dots \times M_n = \emptyset$.

Notation für das n -fache kartesische Produkt von M mit sich selbst: M^n

Z.B. schreiben wir $\mathbb{R}^3$ für $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Für $M = \{0, 1\}$ ist

$$M^3 = M \times M \times M = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

- Für $M = \{a, b\}, N = \{C, D\}, O = \{1, 2\}$ ist

$$M \times N \times O = \{(a, C, 1), (a, C, 2), (a, D, 1), (a, D, 2), \\ (b, C, 1), (b, C, 2), (b, D, 1), (b, D, 2)\}$$

$$O \times M \times N = \{(1, a, C), (1, a, D), (1, b, C), (1, b, D), \\ (2, a, C), (2, a, D), (2, b, C), (2, b, D)\}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt die Menge aller dreidimensionalen Punkte im Raum
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ beschreibt ?

- Für $M = \{0, 1\}$ ist

$$M^3 = M \times M \times M = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

- Für $M = \{a, b\}, N = \{C, D\}, O = \{1, 2\}$ ist

$$M \times N \times O = \{(a, C, 1), (a, C, 2), (a, D, 1), (a, D, 2), \\ (b, C, 1), (b, C, 2), (b, D, 1), (b, D, 2)\}$$

$$O \times M \times N = \{(1, a, C), (1, a, D), (1, b, C), (1, b, D), \\ (2, a, C), (2, a, D), (2, b, C), (2, b, D)\}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt die Menge aller dreidimensionalen Punkte im Raum
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ beschreibt alle dreidimensionalen Punkte eines Würfels mit Seitenlänge 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt

MÄCHTIGKEITEN UND ZÄHLFORMELN

- Mächtigkeit
- Summenformel
- Siebformel
- Produktformel
- Potenzmenge
- Binomialkoeffizienten



Definition

Für eine Menge M , bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M .

$|M|$ heißt die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) von M .

Wenn $|M| \in \mathbb{N}_0$, dann ist M **endlich**, ansonsten ist M **unendlich** (Notation $|M| = \infty$)

Beispiele:

- $|\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}| = 6$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset, 1, \{2, 3, 4, 5\}\}| = 3$ (denn die Menge hat die 3 Elemente $\emptyset$, 1 und $\{2, 3, 4, 5\}$).
- $|\mathbb{N}| = \infty, |\mathbb{R}| = \infty$
- $|\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}| = 0, |\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}| = \infty$

Quiz 6



Hochschule RheinMain

Was ist die Mächtigkeit von

$$\{A, C, F, G, H\}?$$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Quiz 7



Hochschule RheinMain

Was ist die Mächtigkeit von

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge 1 \leq x \leq 20\}?$$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Z.B. $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Satz

Seien M, N endliche Mengen mit $M \subseteq N$. Dann gilt $|N \setminus M| = |N| - |M|$.

Satz (Mächtigkeit des Komplements)

Sei U ein endliches Universum und M eine Teilmenge von U . Dann gilt $|\overline{M}| = |U \setminus M| = |U| - |M|$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} |\text{Volljährige}| &= |\overline{\text{Kinder und Jugendliche}}| \\ &= |\text{Menschen} \setminus \text{Kinder und Jugendliche}| \\ &= |\text{Menschen}| - |\text{Kinder und Jugendliche}| \end{aligned}$$

Satz (Summenformel)

Seien M und N endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

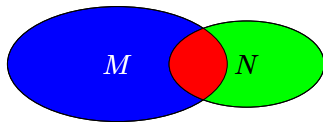
Beweis:

- $M \cup N$ besteht aus drei disjunkten Mengen:

$M \setminus N$ und $N \setminus M$ und $M \cap N$

- Daher gilt

$$\begin{aligned} |M \cup N| &= |M \setminus N| + |N \setminus M| + |M \cap N| \\ &= |M \setminus (M \cap N)| + |N \setminus (M \cap N)| + |M \cap N| \\ &= |M| - |M \cap N| + |N| - |M \cap N| + |M \cap N| \\ &= |M| + |N| - |M \cap N|. \quad \square \end{aligned}$$



Beispiel:

$$M = \{1, 2, 3\} \text{ und } N = \{2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned} |M \cup N| &= |M| + |N| - |M \cap N| \\ &= 3 + 3 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

→ Aus der Aufgabenstellung $|I| = 20$, $|D| = 10$, $|I \cap D| = 5$

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

→ Aus der Aufgabenstellung $|I| = 20$, $|D| = 10$, $|I \cap D| = 5$

→ Mit der Summenformel $|I \cup D| = |I| + |D| - |I \cap D| = 20 + 10 - 5 = 25$

Die Summenformel für **drei** endliche Mengen M, N und O lautet:

$$|M \cup N \cup O| = |M| + |N| + |O| - |M \cap N| - |M \cap O| - |N \cap O| + |M \cap N \cap O|$$

Elemente, die in genau	Beitrag zu		
	$ M + N + O $	$- M \cap N - M \cap O - N \cap O $	$ M \cap N \cap O $
einer Menge sind	1	0	0
zwei Mengen sind	2	-1	0
drei Mengen sind	3	-3	1

Jedes Element wird daher in der Formel genau einmal gezählt.

Satz (Siebformel)

Seien $M_1, \dots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \cup \dots \cup M_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \dots$$

wobei α_i die Summe aller Mächtigkeiten aller Schnitte von i Mengen ist, d.h. α_i berechnet sich durch die folgenden Schritte:

- Für je i Mengen der Mengen $M_1, \dots, M_n$ bilde deren Schnitt.
- Bestimme die Mächtigkeiten der Schnittmengen.
- Summiere die Mächtigkeiten der Schnittmengen.

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

$$\begin{aligned} & |M_1 \cup \dots \cup M_4| \\ = & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \end{aligned}$$

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

$$\begin{aligned} & |M_1 \cup \dots \cup M_4| \\ = & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ = & |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| \\ & - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_4| + |M_3 \cap M_4|) \\ & + (|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4|) \\ & - |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4| \end{aligned}$$

Satz

Seien M und N endliche Mengen, dann gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

Für k endliche Mengen $M_1, \dots, M_k$ gilt $|M_1 \times \dots \times M_k| = |M_1| \cdot \dots \cdot |M_k|$.

Beweis.

- Sei $|M| = m$ und $|N| = n$.
- Für jedes Paar $(x, y) \in M \times N$ hat man m Möglichkeiten für x .
- Ist x festgelegt, so hat man n weitere Möglichkeiten um y festzulegen.
- Also gibt es $m \cdot n$ Möglichkeiten.



- Für vierstellige PINs am Geldautomat gibt es

$$|\{0, \dots, 9\}^4| = 10^4 = 10000$$

Möglichkeiten.

- Ein Schachbrett hat

$$|\{A, \dots, H\} \times \{1, \dots, 8\}| = |\{A, \dots, H\}| \cdot |\{1, \dots, 8\}| = 8 \cdot 8 = 64$$

Felder.

Quiz 8



Hochschule RheinMain

Wie viele Karten hat ein Skatblatt, welches durch

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$$

repräsentiert wird?

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Anwendung: Produktformel

Binäre Tupel sind Tupel, die nur aus 0en und 1en bestehen.

D.h. ein binäres n -Tupel ist von der Form $(b_1, \dots, b_n)$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Beispiel:

- Die Menge aller binären 3-Tupel ist $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.
- Das sind 8 Stück. Wie sieht es allgemein aus?

Satz

Die Anzahl der binären n -Tupel ist 2^n .

Beweis. Verwende die Produktformel für das n -fache Kreuzprodukt von $\{0, 1\}$:

$$\underbrace{|\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}|}_{n \text{ Mal}} = |\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$$

Definition

Sei M eine Menge.

Die Menge aller Teilmengen von M nennt man **Potenzmenge** von M .

Wir schreiben $\mathcal{P}(M)$ für die Potenzmenge.

$$\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$$

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Satz

Jede n -elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen, d.h.
für endliche Mengen M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

- Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine beliebige Nummerierung der n Elemente von M .
- Für jede Teilmenge N von M erzeuge ein binäres n -Tupel $B_N = (b_{N,1}, \dots, b_{N,n})$ wobei $b_{N,i} = 0$, wenn $x_i \notin N$ und $b_{N,i} = 1$ wenn $x_i \in N$.
- Für jedes n -Tupel gibt es genau eine Teilmenge
- Anzahl der n -Tupel ist 2^n . □

Sei $M = \{a, b, c\}$, wobei die Elemente in der Reihenfolge a, b, c nummeriert sind.
Welche binären 3-Tupel stellen die Teilmengen $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ entsprechend dem letzten Beweis jeweils dar?

Sei $M = \{a, b, c\}$, wobei die Elemente in der Reihenfolge a, b, c nummeriert sind. Welche binären 3-Tupel stellen die Teilmengen $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ entsprechend dem letzten Beweis jeweils dar?

$\emptyset$	$(0, 0, 0)$
$\{b, c\}$	$(0, 1, 1)$
$\{a, c\}$	$(1, 0, 1)$
$\{a, b, c\}$	$(1, 1, 1)$

Definition

Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge wird mit

$$\binom{n}{k} \quad (\text{ gesprochen „}n \text{ über } k\text{“})$$

bezeichnet. Diese Zahlen heißen **Binomialkoeffizienten**.

Beispiel:

$\{1, 2, 3, 4\}$ hat $\binom{4}{2} = 6$ zweielementige Teilmengen: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$ und $\{3, 4\}$

$\binom{n}{0} = 1$ für jedes n , da es genau eine nullelementige Teilmenge gibt – die leere Menge

$\binom{n}{n} = 1$ für jedes n , da es genau eine n -elementige Teilmenge gibt – die gesamte Menge

$\binom{0}{0} = 1$ da die leere Menge sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{0}{n} = 0$ für jedes $n > 0$, da die leere Menge nur sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{n}{1} = n$ für jedes n , da es für jedes Element eine einelementige Menge gibt, und diese eine Teilmenge ist (gilt auch für $n = 0!$)

Satz

Sei $1 \leq k \leq n$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis.

- Sei M eine n -elementige Menge und $m \in M$.
- Sei $M_k = \{M' \subseteq M \mid |M'| = k\}$ = alle k -elementigen Teilmengen von M , d.h. $\binom{n}{k} = |M_k|$
- Teile die Mengen in M_k in zwei **disjunkte** Mengen auf:
$$A = \{M' \in M_k \mid m \notin M'\} \quad B = \{M' \in M_k \mid m \in M'\}$$
- $|A|$ = Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k}$
- $|B|$ = Anzahl der $k-1$ -elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k-1}$

□

Fakultät von natürlichen Zahlen

$$n! := n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$$

Wir definieren zusätzlich $0! := 1$.

Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Bei Lotto „6 aus 49“ werden 6 Zahlen aus 49 gegebenen Zahlen gezogen.

$$\text{Möglichkeiten: } \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816$$

Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige: $1/13.983.816 = 0,000000071 \dots$