

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

Angewandte Informatik & Technische Informatik

05 Beweise und Beweisen

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2025/26

Stand der Folien: 17. Dezember 2025

Bildnachweis: Alle Bilder sind selbst gezeichnet oder generiert mit KI von OpenAI unter <https://ki.hs-rm.de>

- 1 Einführendes
- 2 Beweisarten
- 3 Fallunterscheidung
- 4 Schubfachprinzip
- 5 Vollständige Induktion
- 6 Induktive Definitionen

EINFÜHRENDES

- Mathematische Texte
- Warum beweisen?
- Was kennzeichnet Beweise?



Axiom: Grundaussage, wird als gültig angenommen (und nicht bewiesen)

Definition: führt Begriffe/Notation ein. Keine Aussagen, werden daher nicht bewiesen.

Satz: Aussagen (fast immer Wenn-Dann-Aussagen), müssen bewiesen werden.

Lemma: ein Hilfssatz

Satz: wichtig

Theorem: sehr wichtig

Korollar: Satz der direkt aus anderen Sätzen folgt (daher ohne Beweis)

Beweis: zeigt die Korrektheit eines Satzes.

Bemerkung: Erläuterung, Motivationen, interessante Beispiele

Vermutung: Aussage, die nicht bewiesen ist und deren Wahrheitswert daher ungeklärt ist.

Beispiel: Illustriert Begriffe und Aussagen, tragen meistens sehr zum Verständnis bei.

Es ist sehr sinnvoll alle Kategorien zu nummerieren und zu referenzieren, damit eindeutig klar ist, was warum folgt

Warum will man beweisen?

- Sachverhalte ein für allemal klären
- Kritik und Irrtümer ausräumen
- Neues Wissen schaffen
- In der Informatik: Zeige Eigenschaften von neuen Algorithmen: Korrektheit, Laufzeit-, Platzverhalten; tieferer Einblick, wie der Algorithmus funktioniert
- Beweis negativer Aussagen wie „Für dieses Problem gibt es keinen Algorithmus“: Vergeude keine Zeit mit der Suche nach dem Unmöglichen.

- Beispiele sind **kein Beweis!**

„Für alle $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + n + 41$ ist eine Primzahl“ gilt für die ersten 30 Zahlen, aber das ist kein Beweis! (die Aussage gilt auch nicht!, betrachte $n = 41$)

- Sätze müssen **allgemein bewiesen** oder durch **Gegenbeispiel widerlegt** werden.

- Mathematische Sätze sind Wenn-Dann-Aussagen der Form $F \rightarrow G$:
Unter den Aussagen F (der **Voraussetzung**) folgt Aussage G (die **Behauptung**).

Z.B.

Wenn a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

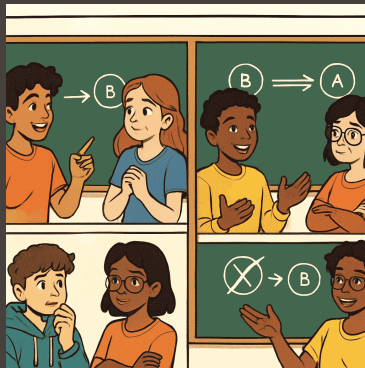
- Behauptung ergibt sich ausschließlich durch die Gesetze der Logik.

Diese Ableitung nennt man **Beweis**

- Beenden eines mathematischen Beweises: Mit der Box $\square$ oder mit „Q.E.D.“ („quod erat demonstrandum“ / „was zu beweisen war“)

BEWEISARTEN

- Direkter Beweis
- Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch



Aus der Voraussetzung F wird „direkt“ die Behauptung G bewiesen.

Muster:

Sei F erfüllt.

... (Diese Lücke ist zu füllen)

Also gilt G .

Beispiel:

Satz. Wenn eine natürliche Zahl n durch 10 teilbar ist, dann ist n gerade.

Beweis.

Sei n durch 10 teilbar.

Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 10 \cdot k$. D.h. $n = 2 \cdot (5 \cdot k)$. Daher ist 2 ein Teiler von n .

Also ist n gerade. □

Quiz 1



Hochschule RheinMain

Zeige: Wenn $a, b \in \mathbb{N}$ gerade sind, dann ist $a + b$ gerade.
Welches Vorgehen entspricht einem direkten Beweis?

- A Sei $a + b$ ungerade. Dann ist $a + b = 2x + 1$. Dann ist entweder a oder b ungerade. Das zeigt die Behauptung.
- B Sei a und b gerade, aber $a + b$ ungerade. Dann ist $a = 2a', b = 2b'$ und $a + b = 2(a' + b')$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $a + b$ ungerade ist. Das zeigt die Behauptung.
- C Sei a und b gerade. Dann ist $a = 2a', b = 2b'$ und $a + b = 2(a' + b')$. Daher ist $a + b$ gerade.
- D Die Behauptung gilt z.B. für $2+4=6$, $4+8=12$. Daher gilt sie im Allgemeinen.

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Beweisen Sie mit einem direkten Beweis:

Aussage: Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade, dann ist $n^2 + n$ gerade.

Beweis. ...

Beweis durch Kontraposition verwendet die Äquivalenz

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$$

Anstelle von F auf G zu schließen, schließt man von $\neg G$ auf $\neg F$.

Muster

Sei $\neg G$ erfüllt.

... (Diese Lücke ist zu füllen)

Also gilt $\neg F$.



Satz. Wenn n^2 eine ungerade Zahl ist, dann ist n eine ungerade Zahl.

Beweis.

Wir verwenden Kontraposition und zeigen die äquivalente Aussage:

Wenn n keine ungerade Zahl ist, dann ist n^2 keine ungerade Zahl.

Sei n keine ungerade natürliche Zahl.

Dann ist n gerade und 2 ein Teiler von n , d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Damit ist n^2 eine gerade und daher keine ungerade Zahl.



Quiz 2



Hochschule RheinMain

Wenn $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot m$ ist nicht durch 3 teilbar, dann sind auch n und m nicht durch 3 teilbar. Welches Vorgehen entspricht einem Beweis durch Kontraposition?

- ① Nehme an, dass $n \cdot m$ durch 3 teilbar ist und zeige, dass n oder m durch 3 teilbar ist.
- ② Nehme an, dass n oder m durch 3 teilbar ist und zeige, dass $n \cdot m$ durch 3 teilbar ist.
- ③ Nehme an, dass $n \cdot m$, n und m durch 3 teilbar sind und führe das zum Widerspruch.
- ④ Prüfe, dass die Aussage für $n = 5$ und $m = 8$ stimmt.

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Vervollständigen Sie den folgenden Beweis durch Kontraposition:

Aussage: Für alle Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$, dann ist n ungerade

Beweis.

Durch Kontraposition. Zu Zeigen: ...

Idee: Man nimmt an, dass die Aussage falsch ist, und führt diese zu einem Widerspruch.
Dann darf man schließen, dass die Aussage wahr ist.

Logisch: Statt $F \rightarrow G$ als wahr (eine Tautologie) zu zeigen, zeigt man $\neg(F \rightarrow G)$ ist falsch (ein Widerspruch).

Logisch umgeformt ergibt dies $\neg(F \rightarrow G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$.

D.h.: Man nimmt an, F gilt, aber G gilt nicht und zeigt, dass dies ein Widerspruch ist.

Muster für einen Beweis durch Widerspruch ist:

Sei F erfüllt. Angenommen G wäre falsch.

... (Diese Lücke ist zu füllen)

Also ergibt sich ein Widerspruch. Daher war die Annahme falsch und G gilt. $\square$

Satz. Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis. Wir verwenden einen Beweis durch Widerspruch.

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.

Dann gibt es teilerfremde Zahlen $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ (der Bruch ist gekürzt).

Dann ist $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, d.h. $p^2 = 2q^2$.

Daher ist p^2 und auch p durch 2 teilbar, d.h. es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $p = 2m$.

Dann gilt $4m^2 = 2q^2$, d.h. $q^2 = 2m^2$.

Daher ist q^2 und auch q durch 2 teilbar, d.h. es gibt Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $q = 2n$.

Dann ist aber $\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$ noch kürzbar. Ein Widerspruch!

Daher war unsere Annahme falsch und $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. □

Quiz 3

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und n^2 durch 4 teilbar ist, dann ist n durch 2 teilbar. Welches Vorgehen entspricht einem Beweis durch Widerspruch?

- ① Nehme an, dass n^2 durch 4 teilbar und n nicht durch 2 teilbar ist und folgere das n^2 nicht durch 4 teilbar ist.
- ② Nehme an, dass n^2 durch 4 teilbar, betrachte die Primfaktorzerlegung von n^2 und folgere, dass n durch 2 teilbar ist.
- ③ Prüfe, dass die Aussage für $n = 4$ und $n = 8$ und daher für alle n stimmt.
- ④ Nehme an, dass n nicht durch 2 teilbar ist und zeige, dass dann n^2 nicht durch 4 teilbar ist.

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Vervollständigen Sie den folgenden Beweis durch Widerspruch:

Aussage: Für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn a rational und $a \cdot b$ irrational, dann ist b irrational.

Beweis.

Durch Widerspruch. Annahme: Sei a rational und das Produkt $a \cdot b$ irrational und ...

Äquivalenzen sind Sätze der Form $F \leftrightarrow G$.

Da dies logisch äquivalent zu $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ ist, können wir den Beweis einer solchen Äquivalenz in zwei Teilen führen nach dem Muster:

Beweis.

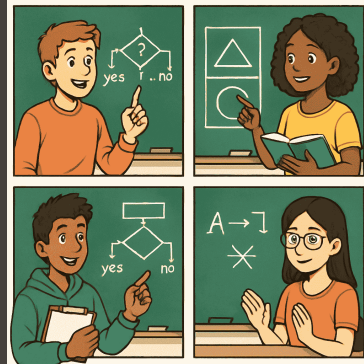
Wir zeigen beide Richtungen.

- $F \rightarrow G$: ...
- $G \rightarrow F$: ...



FALLUNTERSCHIEDUNG

- Fallunterscheidung, logisch
- Beispiele
- Wiederholte Fallunterscheidung



Da

$$(F \rightarrow G) \wedge (\neg F \rightarrow G) \equiv G$$

kann man G beweisen, indem man die Fälle „ F gilt“ und „ F gilt nicht“ jeweils einmal annimmt und zeigt, dass in beiden Fällen auch G gelten muss.

Man unterscheidet also die Fälle

- F gilt
- F gilt nicht

Das ganze kann man wiederholt machen

Wichtig: Keinen Fall vergessen.

Satz

Für jede ganze Zahl z gilt $z^2 \geq 0$.

Beweis.

Wir unterscheiden zwei Fälle: $z < 0$ und $z \geq 0$.

- ① $z < 0$: Dann ist $z^2 = z \cdot z$ das Produkt zweier negativer Zahlen, was positiv ist. Also gilt die Aussage.
- ② $z \geq 0$. Wir unterscheiden nochmal: $z = 0$ oder $z > 0$.
 - ① $z = 0$: $0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \geq 0$
 - ② $z > 0$: Dann ist $z^2 = z \cdot z$ das Produkt zweier positiver Zahlen, welches positiv ist.



Satz

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist $n(n^2 - 1)$ ein Vielfaches von 3.

Beweis.

Wir unterscheiden drei Fälle: $n \bmod 3 = 0$, $n \bmod 3 = 1$, $n \bmod 3 = 2$

- ① $n \bmod 3 = 0$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k$ und $3 \cdot k \cdot (9k^2 - 1)$.
- ② $n \bmod 3 = 1$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k + 1$ und $(3k + 1) \cdot ((3k + 1)^2 - 1) = (3k + 1) \cdot (9k^2 + 6k + 1 - 1) = (3k + 1) \cdot (9k^2 + 6k) = (3k + 1) \cdot (3k^2 + 2k) \cdot 3$.
- ③ $n \bmod 3 = 2$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k + 2$ und $(3k + 2) \cdot ((3k + 2)^2 - 1) = (3k + 2) \cdot (9k^2 + 12k + 4 - 1) = (3k + 2) \cdot (9k^2 + 12k + 3) = (3k + 2) \cdot (3k^2 + 4k + 1) \cdot 3$. □

Aus logischer Sicht wird zweimal unterscheiden:

$n \bmod 3 = 0$ und $n \bmod 3 \neq 0$ und hier nochmal in $n \bmod 3 = 1$ und $n \bmod 3 \neq 1$

SCHUBFACHPRINZIP

- Schubfachprinzip
- Beispiele
- Verallgemeinertes Schubfachprinzip



Satz (Schubfachprinzip, auch Taubenschlagprinzip)

Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt.

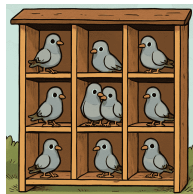
Wenn $m > n$, gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Beweis (durch Widerspruch).

- Seien $m > n$ Objekte in n Kategorien verteilt und jede Kategorie enthält ≤ 1 Objekte.
- Summe aller Objekte $\leq$ Anzahl an Kategorien $= n$.
- Dies ist ein Widerspruch, dass $m > n$ Objekte gegeben waren.

„Taubenschlagprinzip“ stammt von Dirichlets Veranschaulichung des Prinzips:

Wenn man viele Tauben auf wenige Taubenschläge verteilt, dann sitzen in einem Taubenschlag mindestens zwei Tauben.



Einfache Beispiele, die aus dem Schubfachprinzip folgen, sind:

- Unter 13 Personen gibt es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben, unter 367 gibt es mindestens zwei die am selben Tag und Monat Geburtstag haben.
- Unter 4 Studierenden aus den Studiengängen AI, TI, WI gibt es mindestens zwei aus demselben Studiengang.

Quiz 4

Wie viele Personen sind mindestens notwendig,
damit sicher zwei am gleichen Wochentag Geburtstag haben?

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 5

In der Sockenkiste von Emil befinden sich 8 graue und 8 braune Socken. Wie viele muss er herausnehmen, um garantiert zwei gleichfarbige Socken zu erhalten?

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Quiz 6

In der Sockenkiste von Emil befinden sich 8 graue und 8 braune Socken. Wie viele muss er herausnehmen, um garantiert zwei graue Socken zu erhalten?

arsnova.hs-rm.de
3403 0558



Satz

Unter je sechs natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

Beweis.

- Wir verwenden das Schubfachprinzip. Objekte sind die 6 natürlichen Zahlen $k_1, \dots, k_6$, die Kategorien sind:
 - durch 5 teilbar ohne Rest,
 - durch 5 teilbar mit Rest 1
 - durch 5 teilbar mit Rest 2
 - durch 5 teilbar mit Rest 3
 - durch 5 teilbar mit Rest 4
- Schubfachprinzip $\rightarrow$ in mindestens einer Kategorie sind mindestens zwei Zahlen
- d.h. es gibt k_i und k_j (mit $1 \leq i < j \leq 6$) mit $k_i = 5 \cdot x + m$ und $k_j = 5 \cdot y + m$.
- Differenz $k_i - k_j = 5 \cdot (x - y)$ ist durch 5 teilbar □

Zeige mit dem Schubfachprinzip:

Unter 4 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist.

Zeige mit dem Schubfachprinzip:

Unter 4 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist.

Beweis.

- Objekte sind die 4 natürlichen Zahlen $k_1, \dots, k_4$, die Kategorien sind:
 - durch 3 teilbar ohne Rest,
 - durch 3 teilbar mit Rest 1
 - durch 3 teilbar mit Rest 2
- Schubfachprinzip $\rightarrow$ in mindestens einer Kategorie sind mindestens zwei Zahlen
- D.h. es gibt k_i und k_j (mit $1 \leq i < j \leq 4$) mit $k_i = 3 \cdot x + m$ und $k_j = 3 \cdot y + m$.
- Differenz $k_i - k_j = 3 \cdot (x - y)$ ist durch 3 teilbar □

Satz (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt. Wenn $m > r \cdot n$, dann gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens $r + 1$ Objekte enthält.

Beweis durch Widerspruch.

Hätte jede Kategorie höchstens r Objekte,
so gäbe es höchstens $r \cdot n$ Objekte,
was ein Widerspruch zu $m > r \cdot n$ ist.



Beispiel: Unter 25 Personen haben mindestens 3 im selben Monat Geburtstag.
(Schubfachprinzip mit $m = 25$, $n = 12$, $r = 2$ und $r + 1 = 3$)

Quiz 7



Hochschule RheinMain

Wie viele Tauben muss man auf 5 Taubenschläge mindestens verteilen, damit es sicher mindestens einen Taubenschlag mit mindestens 4 Tauben gibt?

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Quiz 7



Hochschule RheinMain

Wie viele Tauben muss man auf 5 Taubenschläge mindestens verteilen, damit es sicher mindestens einen Taubenschlag mit mindestens 4 Tauben gibt?

$r + 1 = 4$, $n = 5$ und es muss mehr als $r \cdot n = 15$ Tauben geben, also 16

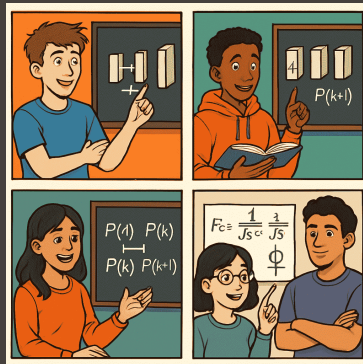
arsnova.hs-rm.de

3403 0558



VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

- Notation: Summenzeichen und Produktzeichen
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion
- Vollständige Induktion mit anderem Startwert
- Starke vollständige Induktion
- Fibonacci-Zahlen die Binet-Formel
- Der goldene Schnitt



Notation: Summenzeichen

- Sei $k \leq n$, $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.
- Dann bezeichnet $\sum_{i=k}^n h(i)$ die Summe

$$h(k) + h(k+1) + \cdots + h(n)$$

- Für $k > n$ setzen wir per Definition (leere Summe) $\sum_{i=k}^n h(i) := 0$.

Beispiele:

- $\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$
- $\sum_{i=3}^4 2^i = 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$

- Sei $k \leq n$, $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

- Dann bezeichnet $\prod_{i=k}^n h(i)$ das Produkt

$$h(k) \cdot h(k+1) \cdots h(n)$$

- Das **leere Produkt** $\prod_{i=k}^n := 1$ (falls $k > n$)

Beispiel: $\prod_{i=1}^n i = n!$

Wie zeigt man Aussagen der Form „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$ “?

Dabei ist $A(n)$ eine Aussage, die von n abhängt.

Beispiele aus der Mathematik und Informatik sind:

- Für alle Folgen von n Elementen berechnet der Algorithmus die sortierte Folge.
- Der Sortieralgorithmus benötigt bei n Eingaben nicht mehr als $n \log_2 n$ Vergleiche.
- Die Anzahl der möglichen Sitzordnungen für die Klausur für n Studierende auf n Stühlen ist $n!$.
- ...

Definition (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)

Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es, die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

- 1 **Induktionsanfang/Induktionsbasis:** $A(1)$ gilt.
- 2 **Induktionsschritt:** Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:
Nehme an, dass $A(n)$ gilt (**Induktionshypothese / Induktionsannahme**).
Zeige, dass dann auch $A(n+1)$ gilt.

Die Aussage $A(m)$ muss für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gelten, denn:

- Fange bei $A(1)$ an: Die Induktionsbasis zeigt, dass die Aussage gilt.
- Jetzt wende $m - 1$ mal den Induktionsschritt an:

Da $A(1)$ gilt, gilt auch $A(2)$.

Da $A(2)$ gilt, gilt auch $A(3)$.

...

Da $A(m - 1)$ gilt, gilt auch $A(m)$.

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \cdot n - 1 > n$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n , d.h. $A(n)$ ist $3 \cdot n - 1 > n$.

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \cdot n - 1 > n$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n , d.h. $A(n)$ ist $3 \cdot n - 1 > n$.

- Induktionsbasis: Aussage $A(1)$ gilt, denn: $3 \cdot 1 - 1 = 2 > 1$.

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \cdot n - 1 > n$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n , d.h. $A(n)$ ist $3 \cdot n - 1 > n$.

- Induktionsbasis: Aussage $A(1)$ gilt, denn: $3 \cdot 1 - 1 = 2 > 1$.

- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Induktionshypothese: $A(n)$ gilt, d.h. $3 \cdot n - 1 > n$ gilt.

Wir müssen $A(n+1)$ zeigen.

$$3 \cdot (n+1) - 1 = 3 \cdot n + 3 - 1 = 3 + 3 \cdot n - 1 \stackrel{I.H.}{>} 3 + n > n + 1$$

□

Satz (Gaußsche Summenformel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n , d.h. $A(n)$ ist $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$.

Satz (Gaußsche Summenformel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n , d.h. $A(n)$ ist $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$.

- Induktionsbasis: Aussage $A(1)$ gilt, denn: $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2}$.

Satz (Gaußsche Summenformel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n , d.h. $A(n)$ ist $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$.

- Induktionsbasis: Aussage $A(1)$ gilt, denn: $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2}$.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Induktionshypothese: $A(n)$, d.h. $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$ gilt.

Wir müssen $A(n+1)$ zeigen.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1 + \sum_{i=1}^n i \stackrel{I.H.}{=} n+1 + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2(n+1) + (n+1)n}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \quad \square$$

Quiz 8

Satz: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich zu n^2 (als Summenformel geschrieben $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$).

Bringe den Beweis in die richtige Reihenfolge.

- ☐
- Zeige die Aussage für $n + 1$:
- Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$ beliebig.
- Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n :
- $= \left(\sum_{i=1}^n 2i - 1 \right) + 2(n + 1) - 1 = \left(\sum_{i=1}^n 2i - 1 \right) + 2n + 1$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$
- Da $1 = 1^2$, stimmt die Aussage.
- $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1$
- Induktionsbasis $n = 1$:
- $\stackrel{I.H.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

arsnova.hs-rm.de

3403 0558



Beweise mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Beispiel: $n! > 2^n$ gilt nicht für $n \in \{1, 2, 3\}$, aber für alle $n \geq 4$.

Definition (Beweisprinzip der Vollständigen Induktion mit anderem Startwert)

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt, genügt es, die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

- ① (Induktionsanfang/Induktionsbasis): $A(n_0)$ gilt.
- ② (Induktionsschritt): Für jede beliebige Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt:
Nehme an, dass $A(n)$ gilt (Induktionshypothese / Induktionsannahme).
Zeige, dass dann auch $A(n+1)$ gilt.

Satz

Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

Beweis.

- Induktionsbasis: Für $n = 4$ gilt $n! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$.
- Induktionsschritt. Sei $n \geq 4$. Wir nehmen $n! > 2^n$ an (Induktionshypothese).
Es gilt:

$$(n+1)! = (n+1)n! \stackrel{I.H.}{>} (n+1)2^n \stackrel{*}{>} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

(*) Für $n \geq 4$ gilt $n+1 > 2$

Satz

Jede n -elementige Menge hat 2^n Teilmengen, d.h. für endliche Mengen M : $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

- Induktionsbasis $n = 0$: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$
- Induktionsschritt: Sei $n \geq 0$ beliebig.

Induktionsshypothese: Jede n -elementige Menge hat 2^n Teilmengen.

Sei M eine $n + 1$ -elementige Menge. Sei m ein Element aus M .

Dann ist $M \setminus \{m\}$ eine n -elementige Menge.

Die Induktionshypothese zeigt, dass $M \setminus \{m\}$ 2^n Teilmengen hat.

Zu jeder dieser Teilmengen können wir m hinzufügen oder nicht.

D.h. M hat doppelt so viele Teilmengen wie $M \setminus \{m\}$, was $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ ergibt. □

Manchmal will man im Induktionsschritt $A(n) \rightarrow A(n+1)$ nicht nur auf die Gültigkeit von $A(n)$ zurückzugreifen, sondern z.B. auch auf $A(n-1)$.

Definition (Beweisprinzip der starken vollständigen Induktion)

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es, die folgende Aussage zu zeigen:

Induktionsschritt: Für jede beliebige Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

Nehme an, dass für alle i mit $n_0 \leq i \leq n-1$ die Aussage $A(i)$ gilt (**Induktionshypothese / Induktionsannahme**).

Zeige, dass dann auch $A(n)$ gilt.

Basisfall ist im Induktionsschritt versteckt!

Denn die Gültigkeit von $A(n_0)$ muss ohne Induktionshypothese gezeigt werden.

Beispiel

Eine Schokoladentafel bestehe aus einem Gitter von $a \cdot b$ Schokoladenstücken. Zeige, dass man exakt $a \cdot b - 1$ Mal Tafeln durchbrechen muss, um alle $a \cdot b$ Stücke zu erhalten.



Beweis mit starker vollständiger Induktion nach $n = a \cdot b$.



Beispiel

Eine Schokoladentafel bestehe aus einem Gitter von $a \cdot b$ Schokoladenstücken. Zeige, dass man exakt $a \cdot b - 1$ Mal Tafeln durchbrechen muss, um alle $a \cdot b$ Stücke zu erhalten.



Beweis mit starker vollständiger Induktion nach $n = a \cdot b$.

- Induktionsbasis: $n = 1$: Dann muss man 0 Mal brechen



Beispiel

Eine Schokoladentafel bestehe aus einem Gitter von $a \cdot b$ Schokoladenstücken. Zeige, dass man exakt $a \cdot b - 1$ Mal Tafeln durchbrechen muss, um alle $a \cdot b$ Stücke zu erhalten.



Beweis mit starker vollständiger Induktion nach $n = a \cdot b$.

- Induktionsbasis: $n = 1$: Dann muss man 0 Mal brechen
- Induktionsschritt:
Induktionshypothese: Tafeln der Größe $x \cdot y \leq n$ muss man $x \cdot y - 1$ Mal brechen.



Beispiel

Eine Schokoladentafel bestehe aus einem Gitter von $a \cdot b$ Schokoladenstücken. Zeige, dass man exakt $a \cdot b - 1$ Mal Tafeln durchbrechen muss, um alle $a \cdot b$ Stücke zu erhalten.



Beweis mit starker vollständiger Induktion nach $n = a \cdot b$.

- Induktionsbasis: $n = 1$: Dann muss man 0 Mal brechen
- Induktionsschritt:

Induktionshypothese: Tafeln der Größe $x \cdot y \leq n$ muss man $x \cdot y - 1$ Mal brechen.

Betrachte eine Tafel mit $n + 1$ Schokoladenstücken. Sei $a \cdot b = n + 1$.

Breche diese Tafel irgendwo. Das ergibt zwei Tafeln mit u und v Schokoladenstücken, wobei $u + v = n + 1$ und $u \leq n$, $v \leq n$.





Eine Schokoladentafel bestehe aus einem Gitter von $a \cdot b$ Schokoladenstücken. Zeige, dass man exakt $a \cdot b - 1$ Mal Tafeln durchbrechen muss, um alle $a \cdot b$ Stücke zu erhalten.

Beweis mit starker vollständiger Induktion nach $n = a \cdot b$.

- Induktionsbasis: $n = 1$: Dann muss man 0 Mal brechen
- Induktionsschritt:

Induktionshypothese: Tafeln der Größe $x \cdot y \leq n$ muss man $x \cdot y - 1$ Mal brechen.

Betrachte eine Tafel mit $n + 1$ Schokoladenstücken. Sei $a \cdot b = n + 1$.

Breche diese Tafel irgendwo. Das ergibt zwei Tafeln mit u und v Schokoladenstücken, wobei $u + v = n + 1$ und $u \leq n$, $v \leq n$.

Um die beiden Tafeln komplett zu zerlegen, werden laut Induktionshypothese $u - 1 + v - 1 = u + v - 2$ Brüche benötigt.

Mit dem einen durchgeführten Bruch ergibt dies $u + v - 1 = n$ Brüche. □

Zurückgreifen auf vorherige Annahmen im Induktionsschritt erfordert i.a. mehr Basisfälle.

Genauer: Wenn der Induktionsschritt zum Folgern der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n - k)$ benötigt, dann kann man dieses Argument nicht für $A(n_0), A(n_0 + 1), \dots, A(n_0 + k - 1)$ verwenden,

Daher muss man all diese Fälle als Basis zeigen.

Beispiel: Falscher Beweis

Aussage: Alle natürlichen Zahlen ab 3 sind ungerade.

Falscher Induktionsbeweis:

Induktionsbasis: Für $n = 3$ gilt die Aussage.

Induktionsschritt: Sei $n \geq 3$ beliebig.

Induktionshypothese: Die Zahlen $1 \leq i \leq n - 1$ sind ungerade.

Da damit insbesondere $n - 2$ ungerade ist, ist auch $n - 2 + 2$ ungerade.

Damit folgt n ist ungerade.

Der Fehler ist z.B. bei $n = 4$: Der Induktionsschritt greift auf $n - 2 = 2$ zurück, aber die Induktionshypothese gibt $A(2)$ nicht her!

Wir hätten $A(4)$ auch direkt als Basis zeigen müssen (was nicht geht!)

Leonardo Fibonacci beschrieb das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- Zu Beginn gibt es ein Kaninchenpaar.
- Jedes Kaninchenpaar braucht 2 Monate nach der Geburt, bis es geschlechtsreif ist.
- Von da an gebiert es in jedem Monat ein neues Paar.
- Alle Kaninchen leben ewig.

Wie viele Kaninchenpaare gibt es zu Beginn des n . Monats?

Monat	Paare
1	1
2	1
3	2 (1 altes Paar + 1 neues Paar (Nachkommen aller Paare aus Monat 1))
4	3 (2 alte Paare + 1 neues Paar (Nachkommen aller Paare aus Monat 2))
5	5 (3 alte Paare + 2 neue Paare (Nachkommen aller Paare aus Monat 3))
6	8 (5 alte Paare + 3 neue Paare (Nachkommen aller Paare aus Monat 4))
7	13 (8 alte Paare + 5 neue Paare (Nachkommen aller Paare aus Monat 5))

Allgemeine Formel: Anzahl Monat n = Anzahl $n - 1$. Monat + Anzahl Monat $n - 2$.

Die Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... nennt man die **Fibonacci-Zahlen**.

Die n . Fibonacci-Zahl kann durch $\text{fib} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ **rekursiv** definiert werden:

$$\text{fib}(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n \in \{1, 2\} \\ \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2) & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

Satz (Binet-Formel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\text{fib}(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Beweis. Wir verwenden starke vollständige Induktion.

- Induktionsbasis für $n = 1$ und $n = 2$:

$$\text{fib}(1) = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\text{fib}(2) = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Induktionsschritt

Sei $n \geq 3$ beliebig. Induktionshypothese: Binet-Formel gilt für $n - 1$ und $n - 2$.

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{I.H.}{=} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right)\right)}{\sqrt{5}} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(*) Die Gleichheiten $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ kann man nachrechnen:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right) = \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right) = \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1 \quad \square$$

Der Goldene Schnitt

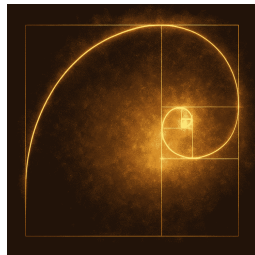
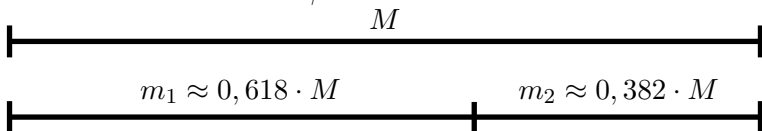
Die Zahl

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61$$

wird auch als der **goldene Schnitt** bezeichnet.

Mit wachsendem n nähert sich $\text{fib}(n+1)/\text{fib}(n)$ an ϕ an

Schöne Eigenschaft von ϕ : Teilt man eine Strecke M in Teilstücke m_1 und m_2 , mit $m_1 > m_2$, sodass $m_1/m_2 = M/m_1$, dann ist dieses Verhältnis $= \phi$:



Dieses Verhältnis wird als besonders ästhetisch wahrgenommen und in der Kunst oder im Design zur Gestaltung oft verwendet.

INDUKTIVE DEFINITIONEN

- Induktiv definieren
- Strukturelle Induktion



Wie beim Induktionsbeweis, kann man auch Strukturen **induktiv definieren**, indem man

- **Basisfall** (kleinste Strukturen) und
- **Induktionsschritt** zum Erzeugen von größeren Strukturen aus kleineren angibt.

Beispiel: Natürliche Zahlen, induktiv definiert:

Basis: 1 ist eine natürliche Zahl.

Schritt: Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist auch der Nachfolger $n + 1$ eine natürliche Zahl.

Induktive Definition für arithmetische Ausdrücke:

- Basis: Ganze Zahlen sind arithmetische Ausdrücke.
- Schritt: Wenn a, b arithmetische Ausdrücke sind, dann sind auch $(a + b)$, $(a \cdot b)$, $(a - b)$ und (a/b) arithmetische Ausdrücke.

Bemerkung:

Die aussagenlogischen Formeln und die prädikatenlogischen Formeln waren ebenfalls induktiv definiert.

Eigenschaften einer induktiv definierten Struktur kann man mit **struktureller Induktion** führen.

- Man zeigt, dass die Eigenschaft für die Basis gilt.
- Im Induktionsschritt nimmt man an, dass die Eigenschaft für die Teilstrukturen gilt und zeigt, dass sie dann auch für jede zusammengesetzte Struktur gilt.

Satz

Für jeden arithmetische Ausdruck a gilt: Wenn n -Operatoren in a vorkommen, dann enthält a mindestens $n + 1$ Zahlen.

Beweis. Induktion über die Struktur von a .

- Induktionsbasis: a ist eine Zahl. Dann enthält a keine Operatoren und $1 = 0 + 1$ Zahlen. Die Aussage stimmt also.
- Induktionsschritt: Seien a, b arithmetische Ausdrücke mit n_a und n_b Operatoren. Induktionshypothese: a enthält $n_a + 1$ Zahlen und b enthält $n_b + 1$ Zahlen. In $(a \text{ op } b)$ mit $\text{op} \in \{+, -, \cdot, /\}$ gilt dann: Der Ausdruck enthält $n_a + n_b + 1$ Operatoren und $n_a + 1 + n_b + 1 = (n_a + n_b + 1) + 1$ Zahlen. □

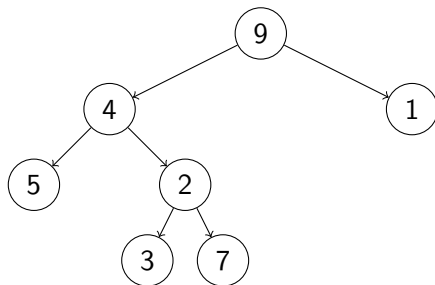
- Eigentlich ein Vorgriff auf das nächste Kapitel
- **Knoten** v ist Element aus einer endlichen Menge V (**Knotenmenge**)
- Jeder Knoten $v \in V$ kommt genau einmal im Binärbaum vor.

Definition

Ein **Binärbaum** ist induktiv definiert durch:

- Basis: Ein einzelner Knoten $v \in V$ ist ein Binärbaum (wir bezeichnen diesen Baum als **Blatt**).
- Schritt: Seien B_1 und B_2 Binärbäume, sodass die Knoten in B_1 und die Knoten in B_2 disjunkt sind und sei $v \in V$ ein Knoten, der nicht in B_1 oder B_2 vorkommt. Dann ist auch die Struktur bestehend aus v (genannt Wurzel) und B_1 (**linker Teilbaum**) und B_2 (**rechter Teilbaum**) auch ein Binärbaum.

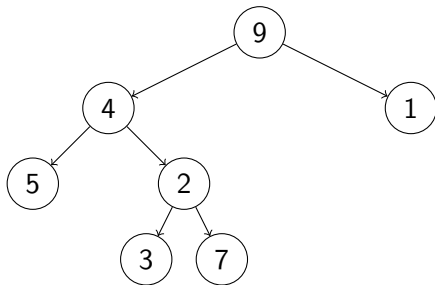
- „Bäume in der Informatik wachsen von oben nach unten“
- Wurzel oben mit den Teilbäumen darunter
- Knoten durch Kreise (mit Beschriftung)
- Knoten zu Teilbaum: Mit Pfeil kennzeichnen (Pfeile nennt man auch gerichtete Kanten)



Definition

Die **Höhe** eines Binärbaums ist induktiv definiert durch:

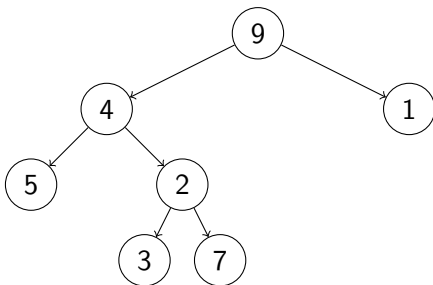
- Basis: Ein Blatt hat Höhe 1.
- Schritt: Ein Binärbaum mit Wurzel v , linkem Teilbaum B_1 und rechtem Teilbaum B_2 hat Höhe $1 + H$, wenn H das Maximum der Höhen von B_1 und B_2 ist.



Höhe = 4

Definition

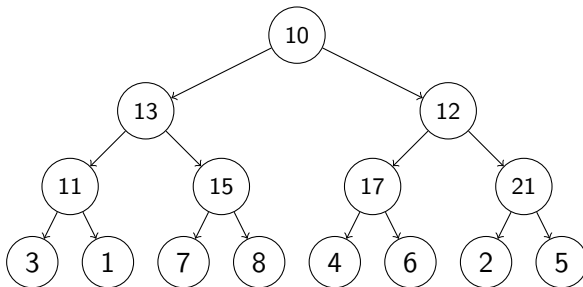
Die **Tiefe** eines Knotens v in einem Binärbaum B ist die Anzahl der Pfeile (d.h. Kanten) von der Wurzel bis zum Knoten v .



Knoten	Tiefe
1	1
2	2
3	3
5	2
7	3
9	0

Definition

Ein Binärbaum ist **vollständig**, wenn alle Blätter in derselben Tiefe sind.



Satz

Ein vollständiger Binärbaum B mit Höhe h hat $2^h - 1$ Knoten.

Beweis durch strukturelle Induktion über B .

- Basis: B ist ein einzelnes Blatt. Dann ist $h = 1$ und $2^1 - 1 = 1$.
- Induktionsschritt: Sei B ein Baum, der nicht nur aus einem Blatt besteht.

Induktionshypothese: Die Aussage gilt für linken und rechten Teilbaum von B .
Seien dies B_1 und B_2 mit Höhen h_1 und h_2 .

Induktionshypothese zeigt: B_1 hat $2^{h_1} - 1$ und B_2 hat $2^{h_2} - 1$ Knoten.

Damit hat B $1 + 2^{h_1} - 1 + 2^{h_2} - 1 = 2^{h_1} + 2^{h_2} - 1$ Knoten.

Da B vollständig, sind B_1 und B_2 vollständig und es gilt $h_1 = h_2$.

Damit folgt $h = 1 + \max(h_1, h_2) = 1 + h_1 = 1 + h_2$ und B hat
 $2^{h_1} + 2^{h_2} - 1 = 2^{h-1} + 2^{h-1} - 1 = 2 \cdot 2^{h-1} - 1 = 2^h - 1$ Knoten. $\square$