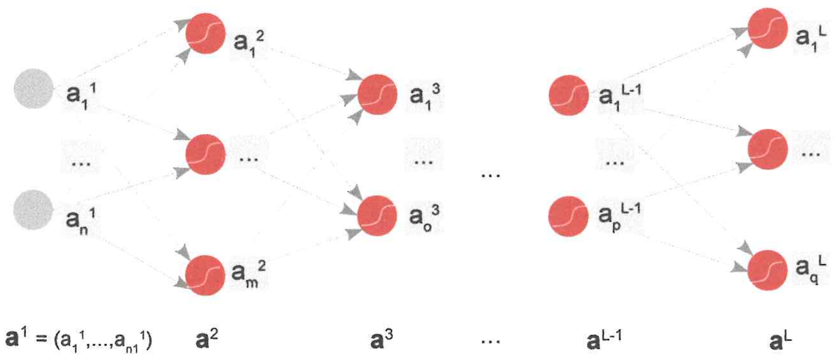
Feedforward-Netze: Berechnungsmodell



- Gegeben den Eingabevektor $\mathbf{a}^1$, wird das Signal Schicht für Schicht durch das Netz propagiert *(forward-pass)*
- In jeder Schicht sammeln wir zunächst den Input z_i^l jedes Neurons …

$$\mathbf{z}^l = W^l \cdot \mathbf{a}^{l-1} + \mathbf{b}^l$$

- … und wenden hierauf für jedes Neuron die Aktivierungsfunktion f an:

$$\mathbf{a}^l = \left(f(z_1^l), f(z_2^l), \ldots \right) = f(\mathbf{z}^l)$$

Forward-Pass: Do-it-yourself

Gegeben ist das folgende Netz mit Treppen-Aktivierungsfunktionen f und Input $\mathbf{x} = (1, 0)$. Berechne den Output $\mathbf{a}^3$.

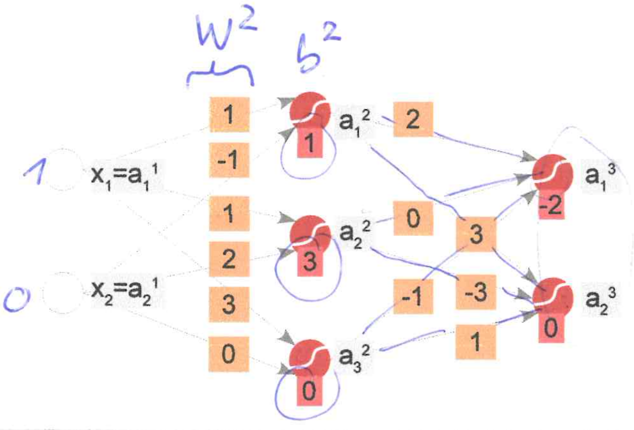
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad W^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Treppe-fkt.

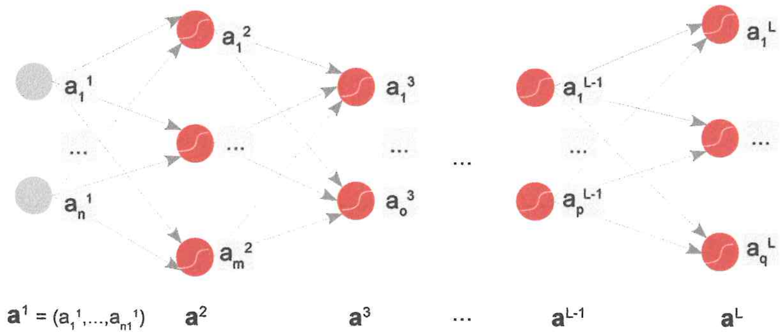
$$z^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a^1} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a^3 = f(z^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



MLP: Backpropagation

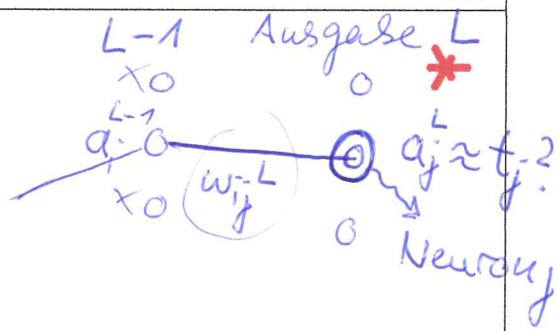


a_j^l = Aktivierung/Ausgabe von Neuron j in Schicht l.

$$= f\Big(\underbrace{\sum_i a_i^{l-1} \cdot w_{ij}^l + b_j^l}_{z_j^l \,\approx\, \text{„Eingabe-Energie"}}\Big)$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \sum_k (a_k^L - t_k)^2$$

MLP: Backpropagation



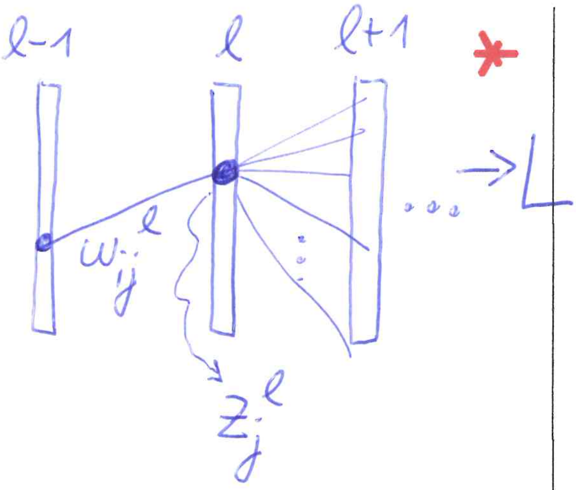
a) Letzte Schicht L

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^L} = \frac{\partial E}{\partial z_j^L} \cdot \frac{\partial z_j^L}{\partial w_{ij}^L}$$

$$= \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot (a_j^L - t_j) \cdot f'(z_j^L)}_{\delta_j^L} \cdot a_i^{L-1}$$

MLP: Backpropagation

b) irgendeine Schicht l



Gleicher Ansatz:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^{l}} = \underbrace{\frac{\partial E}{\partial z_j^{l}}}_{\delta_j^{l}} \cdot \underbrace{\frac{\partial z_j^{l}}{\partial w_{ij}^{l}}}_{a_i^{l-1}}$$

MLP: Backpropagation

c) Formel um δ zurückzupropagieren:

$$\delta^{l} = (\delta_1^{l}, \delta_2^{l}, \dots, \delta_{n_l})^{T}$$

$$= (W^{l+1} \cdot \delta^{l+1}) \odot f'(z^{l})$$

$$x \odot y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix}$$